Investigación de Operaciones II

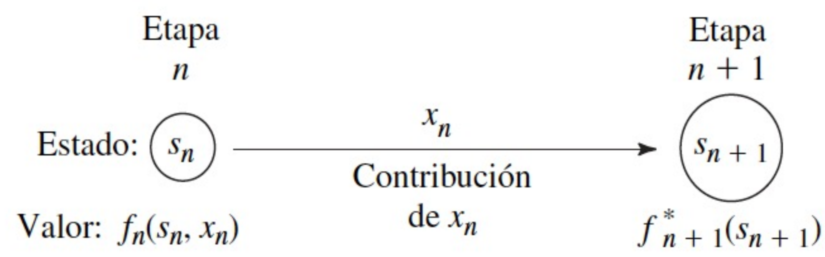
Lectura 1

Programación Dinámica

Profesor:
Ricardo Caballero, M.Sc.
ricardo.caballero@utp.ac.pa

Definición

- Proporciona un procedimiento sistemático para determinar la combinación óptima de decisiones
- Técnica matemática útil para la toma de decisiones secuenciales
- La idea principal de la programación dinámica (PD) es descomponer el problema en subproblemas (más manejables).



Programación dinámica

- Divide problemas difíciles en una secuencia de subproblemas más fáciles
- No existe algoritmo que pueda programarse para resolver todos los problemas

Programación lineal

- Usa algoritmos que pueden programarse para resolver todos los problemas (como método simplex)
- Método que ofrece soluciones de una sola etapa (un periodo de tiempo)

Características de los problemas de programación dinámica

Independientemente del tipo o tamaño de un problema de programación dinámica, existen algunos términos y conceptos importantes que son inherentes a cada problema. Algunos de los más importantes son los siguientes:

1. El problema se puede dividir en **etapas**, cada una de las cuales requiere una **política de decisión**
2. Cada etapa tiene cierto número de **estados** asociados con su inicio
3. El efecto de la política de decisión en cada etapa es transformar el estado actual en un estado asociado con el inicio de la siguiente etapa
4. El procedimiento de solución está diseñado para encontrar una **política óptima** para manejar el problema completo, es decir, una receta para elaborar la política de decisión óptima para cada etapa en cada uno de los estados posibles
5. **Principio de optimalidad**: las decisiones futuras para todas las etapas futuras constituyen una política optima independientemente de la política adoptada en todas las etapas precedentes.
6. El procedimiento de solución comienza cuando se determina la política óptima para la última etapa
7. Se dispone de una ecuación recursiva que identifica la política óptima para la etapa i dada la política óptima para la etapa i+1
8. Cuando se usa esta relación recursiva, el procedimiento de solución comienza al final y se mueve hacia atrás etapa por etapa para encontrar cada vez la política optima para esa etapa hasta que encuentra la política optima de la etapa inicial.

Modelo de la mochila (Knapsack problem)

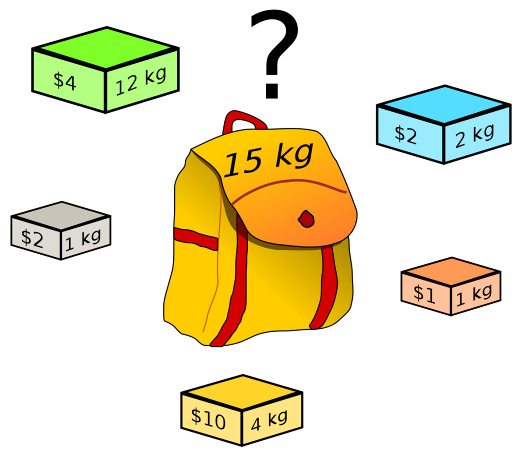
- El problema representa un problema de asignación de recursos general
- El objetivo es determinar los artículos más valiosos que se pueden cargar en una mochila.
- Se busca maximizar el rendimiento total
- El problema general se representa como:

$$Maximizar\ Z = r_1 m_1 + r_2 m_2 + \cdots + r_n m_n$$

sujeto a

$$w_1 m_1 + w_2 m_2 + \cdots + w_n m_n \leq W$$
$$m_1, m_2 \ldots, m_n \ \ enteros\ no\ negativos$$

$W = peso\ máximo\ que\ soporta\ la\ mochila$
$m_i = cantidad\ de\ unidades\ del\ artículo\ i$
$r_i = ingreso\ unitario\ del\ artículo\ i$
$w_i = peso\ del\ artículo\ i$



Modelo de la mochila: Ecuación recursiva

- La etapa i está representada por el artículo i, $i = 1, 2, \dots, n$
- Las alternativas en la etapa i son la cantidad de unidades del artículo i, $m_i = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{W}{w_i} \right\rfloor$, donde $\left\lfloor \frac{W}{w_i} \right\rfloor$ es el mayor entero que es menor o igual a $\frac{W}{w_i}$. Esta definición permite que la solución distribuya algunos, ninguno, o todos los recursos W a cualquier a de los m artículos.
- El rendimiento para m_i es $r_i m_i$
- El estado en la etapa i está representado por x_i, el peso total asignado a las etapas (artículos) $i, i+1, \dots,$ y n. Esta definición reconoce que el límite de peso es la única restricción que liga a todas las n etapas

Defina

- $f_i(x_i) = rendimiento\ máximo\ para\ las\ etapas\ i, i+1, y\ n\ dado\ el\ estado\ \ x_i$

$$f_i(x_i) = \max_{\substack{m_i = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{W}{w_i} \right\rfloor, \\ x_i \leq W}} \{r_i m_i + f_{i+1}(x_i - w_i m_i)\}, \qquad i = 1,2, \dots, n$$

Ejemplo 1: **Modelo de la mochila**

- Un barco de 4 toneladas puede cargarse con uno o más de tres artículos. La siguiente tabla da el peso unitario en toneladas y el ingreso unitario en miles de dólares, para el artículo i. El objetivo es determinar la cantidad de unidades de cada artículo que maximizará el rendimiento total.

Artículo i	Peso unitario w_i (toneladas)	Ingreso unitario r_i (miles de $)
1	2	31
2	3	47
3	1	14

Ejemplo 1: Solución

$$m_i = \left\lfloor \frac{W}{w_i} \right\rfloor$$

$$f_3(x_3) = \max_{m_3 = 0, 1, \dots, 4,} \{14m_3\}$$

$$m_3 = \left\lfloor \frac{W}{w_3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4}{1} \right\rfloor = 4$$

	$14m_3$					Solución Óptima	
x_3	$m_3 = 0$	$m_3 = 1$	$m_3 = 2$	$m_3 = 3$	$m_3 = 4$	$f_3(x_3)$	m_3
0	0	-	-	-	-	0	0
1	0	14	-	-	-	14	1
2	0	14	28	-	-	28	2
3	0	14	28	42	-	42	3
4	0	14	28	42	56	56	4

Ejemplo 1: Solución

$$m_i = \left\lfloor \frac{W}{w_i} \right\rfloor$$

$$f_2(x_2) = \max_{m_2 = 0,1} \{47m_2 + f_3(x_2 - 3m_2)\}$$

$$m_2 = \left\lfloor \frac{W}{w_2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor = 1$$

	$47m_2 + f_3(x_2 - 3m_2)$		Solución Óptima	
x_2	$m_2 = 0$	$m_2 = 1$	$f_2(x_2)$	m_2
0	0 + 0 = 0	-	0	0
1	0 + 14 = 14	-	14	0
2	0 + 28 = 28	-	28	0
3	0 + 42 = 42	47 + 0 = 47	47	1
4	0 + 56 = 56	47 + 14 = 61	61	1

Ejemplo 1: Solución

$$m_i = \left\lfloor \frac{W}{w_i} \right\rfloor$$

$$f_2(x_2) = \max_{m_1 = 0,1,2} \{31m_1 + f_2(x_1 - 2m_1)\}$$

$$m_1 = \left\lfloor \frac{W}{w_1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4}{2} \right\rfloor = 2$$

	$31m_1 + f_2(x_1 - 2m_1)$			Solución Óptima	
x_1	$m_1 = 0$	$m_1 = 1$	$m_1 = 2$	$f_1(x_1)$	m_1
0	0 + 0 = 0	-	-	0	0
1	0 + 14 = 14	-	-	14	0
2	0 + 28 = 28	31 + 0 = 31	-	31	1
3	0 + 47 = 47	31 + 14 = 45	-	47	0
4	0 + 61 = 61	31 + 28 = 59	62 + 0 = 62	62	2

Por lo tanto la solución óptima es que el barco cargue dos unidades del artículo 1, y cero unidades del artículo 2 y 3

El rendimiento asociado es de $ 62,000

Modelo de tamaño de la fuerza de trabajo

- Aplicado para determinar la contratación y despidos para un proyecto (e.g. de construcción)
- El objetivo es minimizar el costo total de mano de obra requerida para un proyecto
- Se supone que la duración del proyecto es de n semanas y que la fuerza de mano de obra mínima requerida en la semana i es de b_i trabajadores.
- El modelo asume que se incurre en un costo adicional si la fuerza de trabajo de una semana excede el requerimiento mínimo o si en una semana se realiza una contratación adicional
- No se incurre en ningún costo cuando ocurre un despido (por sencillez)
- El costo de mantener una fuerza de trabajo x_i mayor que la mínima b_i en la semana i incurre en costo excedente $C_1(x_i - b_i)$. Si $x_i > x_{i-1}$, ocurre contratación a un costo adicional $C_2(x_i - x_{i-1})$

Modelo de tamaño de la fuerza de trabajo: Ecuación recursiva

- La etapa i está representada por la semana i, $i = 1, 2, \dots, n$
- Las alternativas en la etapa i, son x_i, la cantidad de trabajadores en la semana i
- El estado de la etapa i es x_{i-1}, la cantidad de trabajadores en la semana $i - 1$

La ecuación recursiva se da como:

$$f_i(x_{i-1}) = \min_{x_i \geq b_i}\{C_1(x_i - b_i) + C_2(x_i - x_{i-1}) + f_{i+1}(x_i)\}, \qquad \mathrm{i} = 1,2,\dots,\mathrm{n}$$

Condiciones

$$f_{n+1}(x_n) = 0$$

$x_i > b_i$ se incurre en costo por excedente C_1

$x_i > x_{i-1}$ se incurre en costo por contratación C_2

Ejemplo 2: Modelo de tamaño de la fuerza de trabajo

- Un contratista estima que el tamaño de la fuerza de trabajo necesaria durante las siguientes 5 semanas es de 5, 7, 8, 4 y 6 trabajadores, respectivamente. La mano de obra excedente conservada en la fuerza de trabajo costará \$300 por trabajador por semana, y una nueva contratación en cualquier semana incurrirá en un costo fijo de \$400 más \$200 por trabajador por semana.
- Los datos del problema son

$$b_1 = 5, \qquad b_2 = 7, \qquad b_3 = 8 \qquad b_4 = 4 \qquad b_5 = 6$$

$$C_1(x_i - b_i) = 3(x_i - b_i), \qquad x_i > b_i, \qquad i = 1,2,\dots,5$$

$$C_2(x_i - x_{i-1}) = 4 + 2(x_i - x_{i-1}), \qquad x_i > x_{i-1}, \qquad i = 1,2,\dots,5$$

$$Las\ funciones\ de\ costo\ C_1\ y\ C_2\ están\ en\ cientos\ de\ dólares$$

Ejemplo 2: Solución

Semana i	1	2	3	4	5
Cantidad mínima de trabajadores requeridos en la semana i (b_i)	5	7	8	4	6
Fuerza de trabajo en la semana i (x_i)	5, 6, 7, 8	7, 8	8	4, 5, 6	6

Ejemplo 2: Solución

$Semana\ 5$

$b_5 = 6$ $x_5 = 6$ $x_4 = 4, 5, 6$ $f_6(x_5) = 0$

$$f_5(x_4) = \min\{3(x_5 - 6) + [4 + 2(x_5 - x_4)]\}$$

	$3(x_5 - 6) + [4 + 2(x_5 - x_4)]$	Solución Óptima	
x_4	$x_5 = 6$	$f_5(x_4)$	x_5
4	3(0) + [4+2 (6 - 4)] = 8	8	6
5	3(0) + [4+2 (6 - 5)] = 6	6	6
6	3(0) + 0 = 0	0	6

Ejemplo 2: Solución

$Semana\ 4$

$b_4 = 4$ $\quad x_4 = 4, 5, 6$ $\quad x_3 = 8$

$$f_5(x_4) = \min\{3(x_4 - 4) + [4 + 2(x_4 - x_3)] + f_5(x_4)\ \}$$

	$3(x_4 - 4) + [4 + 2(x_4 - x_3)] + f_5(x_4)$			Solución Óptima	
x_3	$x_4 = 4$	$x_4 = 5$	$x_4 = 6$	$f_4(x_3)$	x_4
8	3(0) + 0 + 8 = 8	3(1) + 0 + 6 = 9	3(2) + 0 + 0 = 6	6	6

Ejemplo 2: Solución

$Semana\ 3$

$b_3 = 8$ $\qquad x_3 = 8$ $\qquad x_2 = 7, 8$

$$f_3(x_2) = \min\{3(x_3 - 8) + [4 + 2(x_3 - x_2)] + f_4(x_3)\ \}$$

	$3(x_3 - 8) + [4 + 2(x_3 - x_2)] + f_4(x_3)$	Solución Óptima	
x_2	$x_3 = 8$	$f_3(x_2)$	x_3
7	3(0) + [4 + 2 (1)] + 6 = 12	12	8
8	3(0) + 0 + 6 = 6	6	8

Ejemplo 2: Solución

$Semana\ 2$

$b_2 = 7$ $\qquad$ $x_2 = 7, 8$ $\qquad$ $x_1 = 5, 6, 7, 8$

$$f_2(x_1) = \min\{3(x_2 - 7) + [4 + 2(x_2 - x_1)] + f_3(x_2)\ \}$$

	$3(x_2 - 7) + [4 + 2(x_2 - x_1)] + f_3(x_2)$		Solución Óptima	
x_1	$x_2 = 7$	$x_2 = 8$	$f_2(x_1)$	x_2
5	0 + [4 + 2 (2)] + 12 = 20	3(1) + [4 + 2 (3)] + 6 = 19	19	8
6	0 + [4 + 2 (1)] + 12 = 18	3 + [4 + 2 (2)] + 6 = 17	17	8
7	0 + 0 + 12 = 12	3 + [4 + 2 (1)] + 6 = 15	12	7
8	0 + 0 + 12 = 12	3 + 0 + 6 = 9	9	8

Ejemplo 2: Solución

$Semana\ 1$

$b_1 = 5 \qquad x_1 = 5, 6, 7, 8 \qquad x_0 = 0$

$$f_1(x_0) = \min\{3(x_1 - 5) + [4 + 2(x_1 - x_0)] + f_2(x_1)\ \}$$

	$3(x_1 - 5) + [4 + 2(x_1 - x_0)] + f_2(x_1)$				Solución Óptima	
x_0	$x_1 = 5$	$x_1 = 6$	$x_1 = 7$	$x_1 = 8$	$f_1(x_0)$	x_1
0	0 + [4 + 2(5)] + 19 = 33	3 + [4 + 2(6)] + 17 = 36	6 + [4 + 2(7)] + 12 = 36	9 + [4 + 2(8)] + 9 = 38	33	5

Ejemplo 2: Solución

Semana i	Fuerza de mano de obra mínima	Fuerza de mano de obra real	Decisión	Costo ($)
1	5	5	Contratar 5 trabajadores	1400
2	7	8	Contratar 3 trabajadores	1300
3	8	8	Ningún cambio	0
4	4	6	Despedir 2 trabajadores	600
5	6	6	Ningún cambio	0

El costo total de mano de obra para el proyecto es de $3300

Modelo de reemplazo de equipo

- Busca determinar la edad más económica de una máquina
- Suponga que el problema de reemplazo de equipo de una máquina abarca n años. Al inicio de cada año, una máquina o se mantiene en servicio un año más, o se reemplaza por una nueva
- Sea $r(t)$ el ingreso anual , $c(t)$ el costo de operación, y $s(t)$ el valor de desecho de una máquina de t años.
- El costo de adquisición de una nueva máquina en cualquier año es de I

Modelo de reemplazo de equipo: Ecuación recursiva

- La etapa i está representada por el año i, $i = 1, 2, \dots, n$
- Las alternativas en la etapa (año) i, son conservar (K) o reemplazar (R) la máquina al inicio del año i
- El estado de la etapa i es la edad de la máquina al inicio del i

Dado que la máquina tiene t años al inicio del año i, defina

$$f(t) = ingreso\ neto\ máximo en\ los\ años\ \mathrm{i}, i+1, \dots y\ \mathrm{n}$$

La ecuación recursive es:

$$f_n(t) = máx \begin{cases} r(t) - c(t) + s(t+1) \quad , & si\ se\ Conserva \\ r(0) + s(t) + s(1) - I - c(0), & si\ se\ Reemplaza \end{cases}$$

$$f_i(t) = máx \begin{cases} r(t) - c(t) + f_{i+1}(t+1). & si\ se\ Conserva \\ r(0) + s(t) - I - c(0) +\ f_{i+1}(t+1), & si\ se\ Reemplaza \end{cases} \quad , i = 1,2, \dots, n-1$$

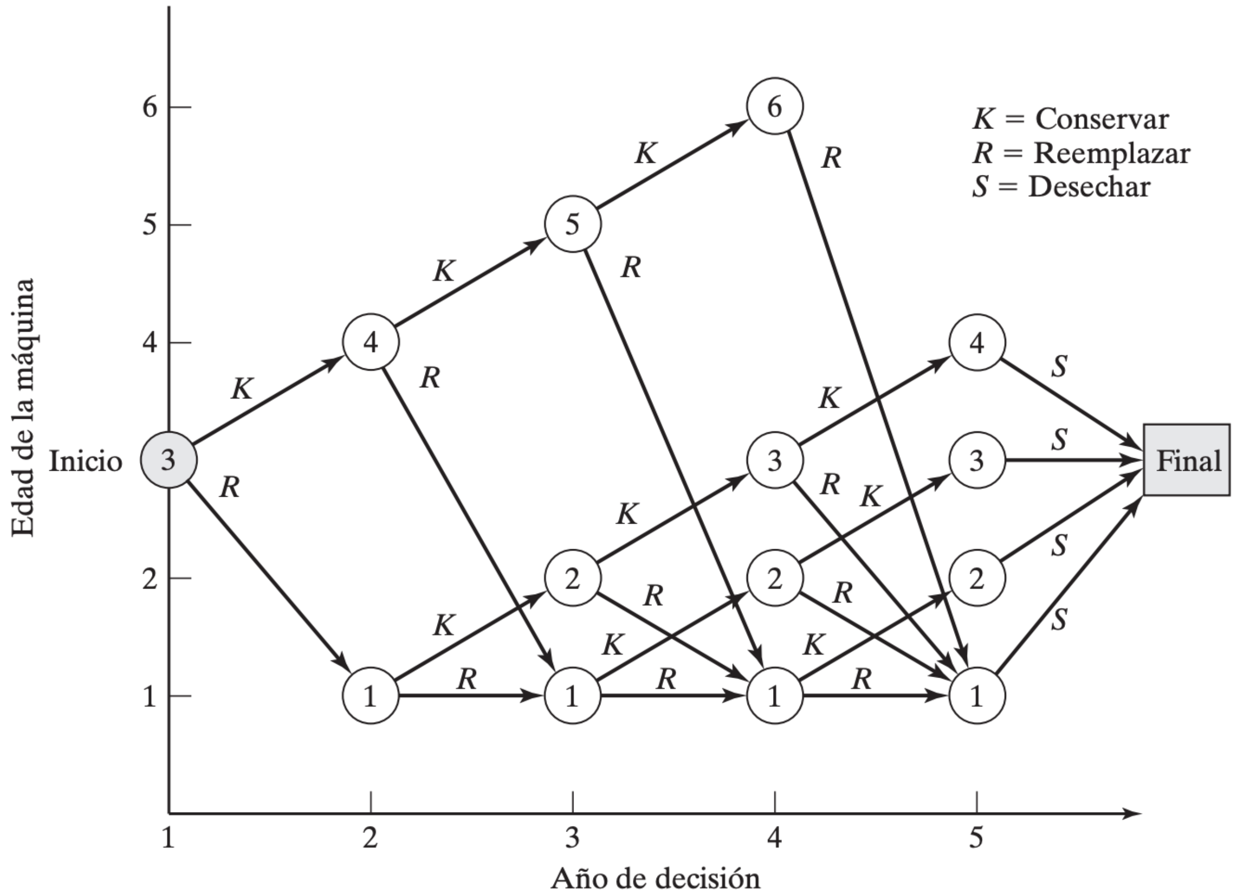
Ejemplo 3: Modelo de reemplazo de equipo

Una compañía necesita determinar la política de reemplazo para una máquina que a la fecha tiene tres años de edad, durante los siguientes 4 años (n=4). Cuando una máquina tiene 6 años de edad debe ser reemplazada. El costo de una máquina nueva es de $100,000. La siguiente tabla da los datos del problema

Edad (años)	Ingresos r(t)	Costo de operación c(t)	Valor de desecho s(t)
0	20,000	200	-
1	19,000	600	80,000
2	18,500	1,200	60,000
3	17,200	1,500	50,000
4	15,500	1,700	30,000
5	14,000	1,800	10,000
6	12,200	2,200	5,000

Ejemplo 3: Solución

Representación gráfica de la edad de una máquina como una función del año de decisión



Ejemplo 3: Solución

Etapa 4

Edad (años)	Conservar (K)	Reemplazar (R)	Solución Óptima	
	r(t) + s(t+1) - c(t)	r(0) + s(t) + s(1) – c(0) - I	$f_4(t)$	Decisión
1	19 + 60 - .6 = 78.4	20 + 80 + 80 - .2 – 100 = 79.8	79.8	R
2	18,5 + 50 – 1.2 = 67.3	20 + 60 + 80 - .2 – 100 = 59.8	67.3	K
3	17.2 + 30 – 1.5 = 45.7	20 + 50 + 80 - .2 – 100 = 49.8	49.8	R
6	(debe reemplazarse)	20 + 5 + 80 - .2 – 100 = 4.8	4.8	R

Ejemplo 3: Solución

Etapa 3

Edad (años)	Conservar (K)	Reemplazar (R)	Solución Óptima	
	r(t) - c(t) + $f_4(t+1)$	r(0) + s(t) – c(0) – I + $f_4(1)$	$f_3(t)$	Decisión
1	19 - .6 + 67.3 = 85.7	20 + 80 - .2 – 100 + 79.8 = 79.6	85.7	K
2	18.5 – 1.2 + 49.8 = 67.1	20 + 60 - .2 – 100 + 79.8 = 59.6	67.1	K
5	14 + – 1.8 + 4.8 = 17	20 + 10 - .2 – 100 + 79.8 = 9.6	17	K

Ejemplo 3: Solución

Etapa 2

Edad (años)	Conservar (K)	Reemplazar (R)	Solución Óptima	
	r(t) - c(t) + $f_3(t+1)$	r(0) + s(t) – c(0) – I + $f_3(1)$	$f_2(t)$	Decisión
1	19 - .6 + 67.1 = 85.5	20 + 80 - .2 – 100 + 85.7 = 85.5	85.5	K o R
4	15.5 – 1.7 + 17 = 30.8	20 + 30 - .2 – 100 + 85.7 = 35.5	35.5	K

Ejemplo 3: Solución

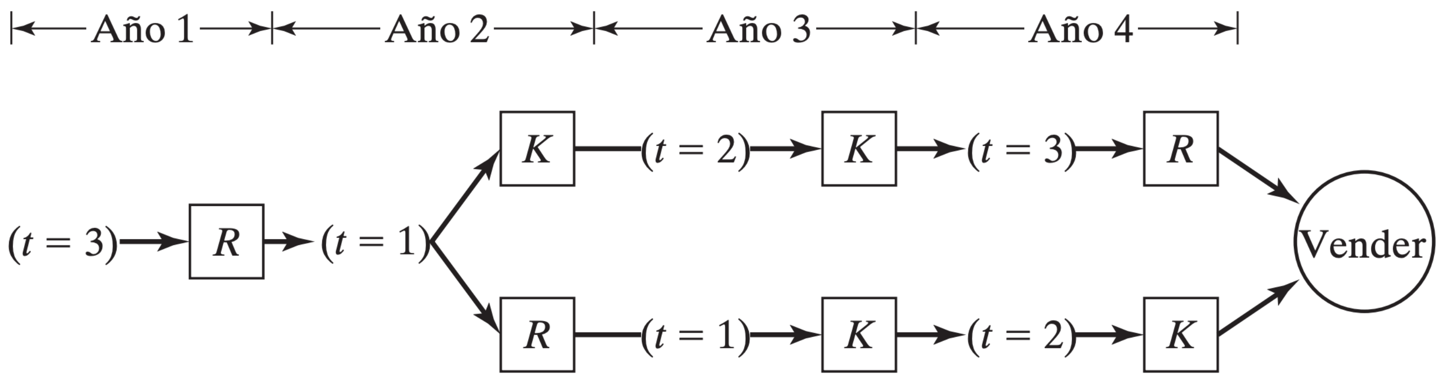
Etapa 1

Edad (años)	Conservar (K)	Reemplazar (R)	Solución Óptima	
	r(t) - c(t) + $f_2(t+1)$	r(0) + s(t) – c(0) – I + $f_2(1)$	$f_1(t)$	Decisión
3	17.2 – 1.5 + 35.5 = 51.2	20 + 50 - .2 – 100 + 85.5 = 55.3	55.3	R

Ejemplo 3: Solución

Las políticas óptimas alternativas al inicio del año 1 son (R,K,K,R) y (R,R,K,K).

El costo total es de $55,300.



Libros de referencia

- Render, B. (2016). Métodos cuantitativos para los Negocios. Editorial Pearson.
- Gohout, W. (2013). Operations Research. Oldenbourg Verlag München
- Taha, H. (2011). Investigación de Operaciones. Editorial Pearson.
- Hillier, F. & Lieberman, G. (2015). Investigación de Operaciones. McGraw-Hill
- Winston, W. (2004). Operations Research Applications and Algorithms. Thomson Brooks/Cole
- Zimmermann, H. (2008). Operations Research: Methoden und Modelle für Wirtschaftsingenieure, Betriebswirte und Informatiker
- Heinrich, G. (2013) Operations Research. Oldenbourg Verlag München.
- Anderson, D. & Sweeny, D. (2019). Métodos Cuantitativos para los Negocios. Cengage
- Eppen, D. (2000). Investigación de Operaciones en la Ciencia Administrativa. Pearson
- García et al. (2013). Simulación y Análisis de Sistemas con ProModel. Editorial Pearson.
- Srinivasan, G. (2010). Quantitative Models in Operations and Supply Chain Management. PHI Learning Private Limited
- Rardin, R. (2017). Optimization in Operations Research. Pearson
- Carter, M. et al. (2019). Operations Research A Practical Introduction. Taylor & Francis Group
- Aoroto Álvares, C., [et al] (2014) Operations research in business administration and managenent. Valencia: Universitat Politècnica de València
- Ravi Ravindran, A. (2008) Operations Research & Management Science Handbook. Taylor & Francis Group
- Rees, M. (2015). Business Risk and Simulation Modeling in Practice. John Wiley & Sons Ltd
- Sterman, J. (2000). Business Dynamics – Systems Thinking and Modeling for a Complex World. McGraw-Hill
- Winston, W. (2017) Microsoft Excel 2016 – Data Analysis and Busines Modeling. Microsoft press
- Schaffernicht, M. (2006). *Dinámica de Sistemas – Tomo 1: Fundamentos*.
- Alvarez, H. (2011). Introducción a la Simulación. Universidad Tecnológica de Panamá
- Cassandras & Lafortune. (2008). *Introduction to Discrete Event Systems*. Springer
- Bandyopadhyay, S. et al (2014). Discrete and Continuous Simulation: Theory and Practice. Taylor & Francis Group
- García et al. (2013). *Simulación y Análisis de Sistemas con ProModel*. Editorial Pearson.
- Schroeder et al. (2011). *Administración de Operaciones*. McGraw-Hill
- Render, B. & Heizer, J. (2014). *Principios de Administración de Operaciones*. Pearson
- Chase, R. & Jacobs, F. (2014). *Administración de Operaciones, Producción y Cadena de Suministro.* McGraw – Hill
- Rees, M. (2015). *Business Risk and Simulation Modeling in Practice*. John Wiley & Sons Ltd
- Sterman, J. (2000). *Business Dynamics – Systems Thinking and Modeling for a Complex World*. McGraw-Hill
- Winston, W. (2017) *Microsoft Excel 2016 – Data Analysis and Busines Modeling*. Microsoft press
- Slack, N., et al. (2016) . *Operations Management*. Pearson
- Stevenson, W. (2015*). Operations Management*. McGraw-Hill

Contacto

Ricardo Caballero, M.Sc.

Docente Tiempo Completo
Facultad de Ingeniería Industrial
Centro Regional de Chiriquí
Universidad Tecnológica de Panamá

E-mail: ricardo.caballero@utp.ac.pa

https://www.academia.utp.ac.pa/ricardo-caballero