Investigación de Operaciones II

Lectura 3

Cadenas de Markov

Profesor:
Ricardo Caballero, M.Sc.
ricardo.caballero@utp.ac.pa

Generalidades

- El análisis de Markov es una técnica que maneja las probabilidades de ocurrencia futura, mediante el análisis de las probabilidades conocidas en el presente.
- Tiene diversas aplicaciones en los negocios.
- El análisis de Markov supone que el sistema comienza en un estado o condición inicial.
- Las probabilidades de cambio de un estado a otro se conocen como matriz de probabilidades de transición.

Supuestos

1. Existe un número limitado o finito de estados posibles.

2. La probabilidad de cambiar de estado permanece igual con el paso del tiempo.

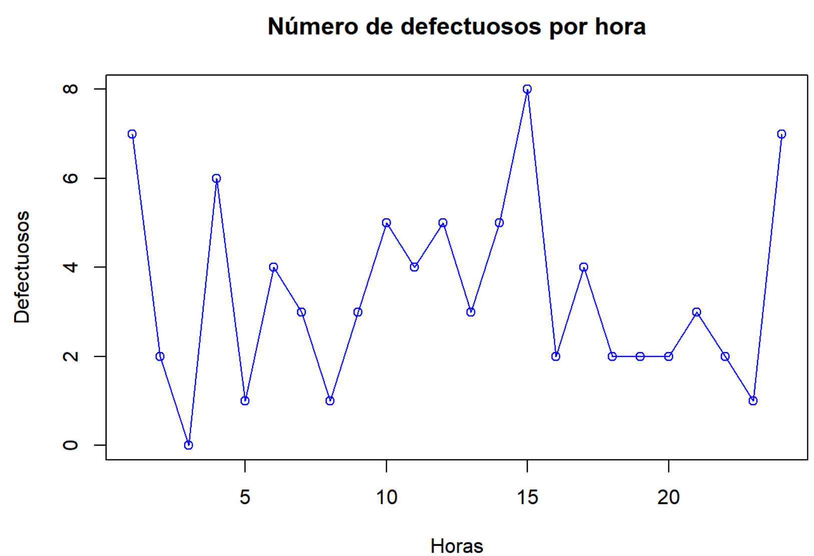
3. Podemos predecir cualquier estado futuro a partir del estado anterior (estado actual) y la matriz de probabilidades de transición.

4. El tamaño y la composición del sistema no cambia durante el análisis.

Proceso estocástico

Concepto matemático que sirve para usar magnitudes aleatorias que varían con el tiempo o para caracterizar una sucesión de variables aleatorias que evolucionan en función de otra variable (tiempo)

- Sea X_t una variable aleatoria que caracteriza el estado del sistema en puntos discretos en el tiempo $t = 1,2,\ldots$
- La familia de variables aleatorias $\{\mathrm{X}_t\}$ forma un **proceso estocástico** con una cantidad finita de estados



Ejemplo 1: Proceso estocástico – mantenimiento preventivo

Las condiciones de una máquina en el momento de mantenimiento preventivo mensual son mala, regular o buena.

Para el mes t el proceso estocástico se representa como :

$$\mathrm{X}_t = condición\ de\ una\ máquina\ en\ el\ momento\ del\ mantenimiento\ preventivo\ del\ mes\ t$$

La variable aleatoria puede tomar los siguientes estados

$$\mathrm{X}_t = \begin{cases} 0, & si\ la\ condición\ es\ mala \\ 1, & si\ la\ condición\ es\ regular \\ 2, & si\ la\ condición\ es\ buena \end{cases}$$

La variable aleatoria Xt es finita porque representa tres estados: malo (0), regular (1) y bueno (2).

Ejemplo 2: Proceso estocástico – evolución del clima

El clima en la ciudad de David puede cambiar con rapidez de un día a otro. Sin embargo, las posibilidades de tener clima seco (sin lluvia) mañana es de alguna forma mayor si hoy está seco, es decir, si no llueve. En particular, la probabilidad de que mañana esté seco es de 0.8 si hoy está seco, pero es de sólo 0.6 si hoy llueve. Estas probabilidades no cambian si se considera la información acerca del clima en los días anteriores a hoy.

$\mathrm{X}_t = clima\ de\ la\ ciudad$

Para t = 0, 1, 2…. la variable puede tomar los valores

$$\mathrm{X}_t = \begin{cases} 0, & día\ t\ es\ seco \\ 1, & día\ t\ es\ lluvioso \end{cases}$$

El proceso estocástico $\{X_t\} = \{X_0, X_1, X_2, \ldots.\}$ proporciona una representación matemática de la forma en que evoluciona el clima en la ciudad de David a través del tiempo

Proceso de Markov

- Proceso estocástico → variables aleatorias que evolucionan a través del tiempo
- Un proceso estocástico es **un proceso de Markov si un estado futuro depende sólo del estado inmediatamente anterior**
- En un proceso markoviano con n estados exhaustivos y mutuamente excluyentes, las probabilidades en un punto específico del tiempo $t = 0,1,2,\ldots$ se definen como

$$p_{ij} = P\{X_t = j |\ X_{t-1} = i\}, \qquad i = 1,2,\ldots,n\,; \qquad j = 1,2,\ldots,n, \qquad t = 0,1,2,\ldots,T$$

- Esto se conoce como **probabilidad de transición en un paso** al ir del estado i en t - 1 al estado j en t.

- Cuando la probabilidad de transición $p_{ij}(t)$ es independiente de t para todo i, j se obtiene una **cadena de Markov homogénea**

- Por definición, se tiene:

$$\sum p_{ij} = 1, \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

$$p_{ij} \geq 0\ (i,j) = 1,2,\ldots,n$$

Matriz de probabilidades de transición

- La información de probabilidad de transición para una cadena de Markov de tiempo discreto se resume en forma de matriz
- La matriz de probabilidades de transición nos permite ir de un estado actual a un estado futuro

Sea p_{ij} = probabilidad condicional de estar en el estado j ahora, dado se estuvo en i anteriormente.

Sea $\mathbf{P}$ = la matriz de probabilidades de transición:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{cc} & \text{Estado del sistema el siguiente periodo} \\ \begin{array}{c}\text{Estado del sistema} \\ \text{este periodo}\end{array} & \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & & \cdots & & \vdots \\ p_{m1} & & & & p_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

- Los valores individuales de p_{ij} se determinan empíricamente
- Las probabilidades en cada renglón sumarán 1
- La **matriz P** define una **cadena de Markov** y tiene la propiedad de que todas sus probabilidades de transición p_{ij} son estacionarias e independientes a lo largo del tiempo.

Matriz de probabilidades de transición

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & & \cdots & & \vdots \\ p_{m1} & & & & p_{mn} \end{bmatrix}$$

P_{11} = probabilidad de estar en el estado 1, después de estar en el estado 1 en el periodo anterior
P_{12} = probabilidad de estar en el estado 2, después de estar en el estado 1 en el periodo anterior
P_{13} = probabilidad de estar en el estado 3, después de estar en el estado 1 en el periodo anterior

P_{21} = probabilidad de estar en el estado 1, después de estar en el estado 2 en el periodo anterior
P_{22} = probabilidad de estar en el estado 2, después de estar en el estado 2 en el periodo anterior
P_{23} = probabilidad de estar en el estado 3, después de estar en el estado 2 en el periodo anterior

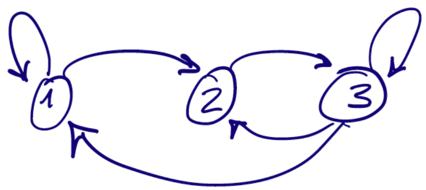
P_{31} = probabilidad de estar en el estado 1, después de estar en el estado 3 en el periodo anterior
P_{32} = probabilidad de estar en el estado 2, después de estar en el estado 3 en el periodo anterior
P_{33} = probabilidad de estar en el estado 3, después de estar en el estado 3 en el periodo anterior

Clasificación de los estados de una cadena de Markov

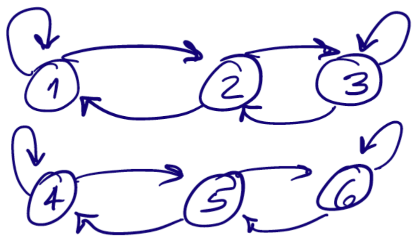
Los estados de una cadena de Markov se clasifican con base en la probabilidad de transición p_{ij} de P

1. Un estado j es **absorbente** si está seguro de regresar a sí mismo en una transición, es decir $p_{ij} = 1$
2. Un estado j es **transitorio** si puede llegar a otro estado pero no puede regresar desde otro estado.
3. Un estado j es **recurrente** si la probabilidad de ser revisitado desde otros estados es 1. Esto puede suceder si, y solo si, el estado no es transitorio
4. Un estado j es **periódico** con periodo $t > 1$ si es posible un retorno sólo en $t, 2t, 3t,$…pasos

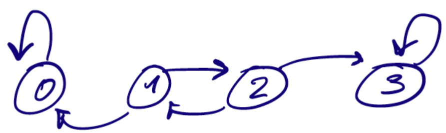
Clasificación de los estados de una cadena de Markov



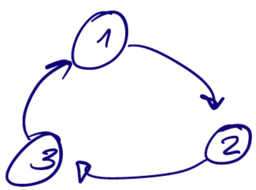
- Irreducible
- Todos los estados son recurrentes



- Reducible (se pueden pensar como dos cadenas separadas



- Irreducible
- Estado absorbente

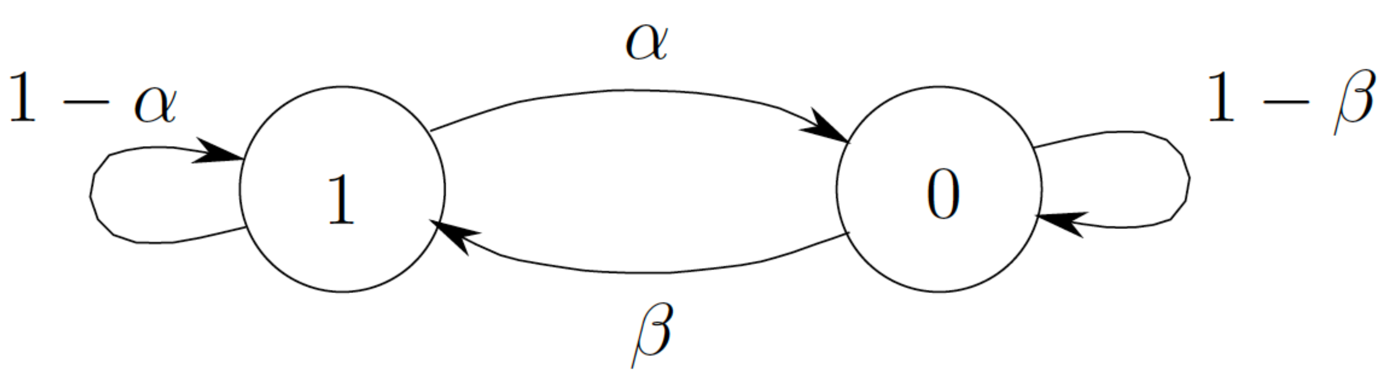


- Irreducible

Ejemplo 3: Cadena de Markov homogénea

Considere que una máquina puede estar en dos estados diferentes, funcionando o parada. Se escoge un espacio de estado de {0, 1} donde 1 significa que la máquina está funcionando y 0 significa que la máquina está parada. El estado de la máquina se revisa cada hora, dada $t = 0, 1, \ldots$ Se forma la secuencia estocástica $\{X_t\}$, donde X_t es el estado de la máquina a la t hora. Asumamos que si la máquina está funcionando tiene una probabilidad α de fallar durante la siguiente hora. Si la máquina esta parada, tiene una probabilidad β de ser reparada en la siguiente hora.

Esquematice el **diagrama de transición de estados**



$$p_{10} = \alpha, \quad p_{11} = 1-\alpha, \quad p_{01} = \beta, \quad p_{00} = 1-\beta$$

Estados y probabilidades de estado

- Los estados se utilizan para identificar todas las condiciones posibles de un proceso o sistema.
- Es posible identificar los estados específicos de muchos procesos o sistemas.
- En el análisis de Markov suponemos que los estados son tanto colectivamente exhaustivos como mutuamente excluyentes.
- Después de identificar los estados, el siguiente paso consiste en determinar la probabilidad de que el sistema esté en dicho estado.

La información se coloca en un vector de probabilidades de estado:

$$\pi(i) = \text{vector de probabilidades de estado para el periodo } i$$
$$= (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_n)$$

Donde:

n = número de estados

$\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ = probabilidad de estar en el estado 1, estado 2, …, estado n

Estados y probabilidades de estado

- En algunos casos, es posible saber con total certidumbre en qué estado se encuentra el artículo:
- Entonces, el vector de estado se representa como:

$$\pi(1) = (1, 0)$$

donde

$\pi(1)$ = vector de estado en el periodo 1

π_1 = 1 = probabilidad de estar en el primer estado

π_2 = 0 = probabilidad de estar en el segundo estado

Ejemplo 5: Tienda de abarrotes

- Analicemos el vector de estado para las personas de la pequeña ciudad que tiene tres tiendas de comestibles. Podría haber un total de 100,000 personas que compran en las tres tiendas de comestibles durante un mes determinado. Cuarenta mil personas pueden ir de compras e American Food Store, que se llamará el estado 1. Treinta mil personas pueden ir a compras a Food Mart, que se llamarà el estado 2, y treinta mil personas pueden ir de compras a Atlas Foods, que se llamará el estado 3. La probabilidad de que una persona vaya de compras a una de las tres tiendas comestibles es la siguiente:

  - Estado 1, American Food Stores $\frac{40,000}{10,000} = 0.40 \rightarrow 40\%$
  - Estado 2, Food Mart $\frac{30,000}{10,000} = 0.30 \rightarrow 30\%$
  - Estado 3, Atlas Foods $\frac{30,000}{10,000} = 0.30 \rightarrow 30\%$

Ejemplo 5: Tienda de abarrotes

Estas probabilidades se colocan en el vector de probabilidades de estado como

$$\pi(0) = (0.4, 0.3, 0.3)$$

donde $\pi(0)$ = vector de probabilidades de estado para las tres tiendas en el periodo inicial

$\pi_1 = 0.4 =$ probabilidad de que una persona compre en American Food, estado 1
$\pi_2 = 0.3 =$ probabilidad de que una persona compre en Food Mart, estado 2
$\pi_3 = 0.3 =$ probabilidad de que una persona compre en Atlas Foods, estado 3

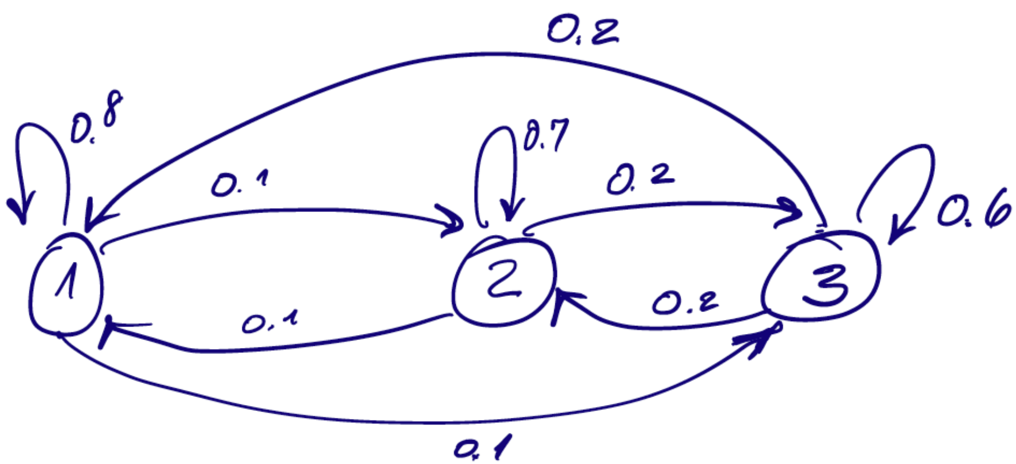
- Las probabilidades en el vector de estado representan la participación en el mercado de las tres tiendas.
- La gerencia de las tres tiendas estará interesada en la manera en que cambia su participación en el mercado con el tiempo.

Ejemplo 5: Tienda de abarrotes

- Un estudio determinó qué tan leales son los clientes.
- Se determinó que 80% de los clientes que compran en American Food en un mes volverán a la tienda el mes siguiente. El restante 20% de los clientes pasarán 10% a Food Mart y 10% a Atlas Foods en su próxima compra.
- De los clientes que compren en Food Mart 70% regresarán, 10% pasará a American Food y 20% pasará a Atlas Foods
- De los clientes que compren en Atlas Foods, el 60% regresará mientras que 20% se irá a American Food y el restante 20% hacia Food Mart.

Esquematice el diagrama de transición de estados

Ejemplo 5: Diagrama transición de probabilidades para las tres tiendas



- Un estudio determinó qué tan leales son los clientes.
- Se determinó que 80% de los clientes que compran en American Food en un mes volverán a la tienda el mes siguiente. El restante 20% de los clientes pasarán 10% a Food Mart y 10% a Atlas Foods en su próxima compra.
- De los clientes que compren en Food Mart 70% regresarán, 10% pasará a American Food y 20% pasará a Atlas Foods
- De los clientes que compren en Atlas Foods, el 60% regresará mientras que 20% se irá a American Food y el restante 20% hacia Food Mart.

Ejemplo 5: Matriz de probabilidades de transición para las tres tiendas

Usamos los datos históricos para desarrollar la siguiente matriz:

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Renglón 1

0.8 = P_{11} = probabilidad de estar en el estado 1, después de estar en el estado 1 en el periodo anterior

0.1 = P_{12} = probabilidad de estar en el estado 2, después de estar en el estado 1 en el periodo anterior

0.1 = P_{13} = probabilidad de estar en el estado 3, después de estar en el estado 1 en el periodo anterior

Renglón 2

0.1 = P_{21} = probabilidad de estar en el estado 1, después de estar en el estado 2 en el periodo anterior

0.7 = P_{22} = probabilidad de estar en el estado 2, después de estar en el estado 2 en el periodo anterior

0.2 = P_{23} = probabilidad de estar en el estado 3, después de estar en el estado 2 en el periodo anterior

Renglón 3

0.2 = P_{31} = probabilidad de estar en el estado 1, después de estar en el estado 3 en el periodo anterior

0.2 = P_{32} = probabilidad de estar en el estado 2, después de estar en el estado 3 en el periodo anterior

0.6 = P_{33} = probabilidad de estar en el estado 3, después de estar en el estado 3 en el periodo anterior

Predicción de la participación futura en el mercado

- Uno de los propósitos del análisis de Markov es predecir el futuro.
- Dado el vector de probabilidades de estado y la matriz de probabilidades de transición, no es muy difícil determinar las probabilidades de estado en una fecha futura.
- Este tipo de análisis permite el cálculo de la probabilidad de que una persona compre en alguna de las tiendas en el futuro.
- Como esta probabilidad es igual a la participación en el mercado, es posible determinar la participación futura en el mercado de las tiendas de abarrotes

Cuando el periodo actual es 0, las probabilidades de estado del siguiente periodo 1 se determinan como sigue:

$$\pi(1) = \pi(0)P$$

Para cualquier periodo n calculamos las probabilidades de estado del periodo $n + 1$ como sigue:

$$\pi(n) = \pi(n-1)P$$

Ejemplo 5: Predicción de la participación futura en el mercado

Los cálculos para la participación en el mercado del periodo siguiente son:

$$\pi(1) = \pi(0)P$$

$$= (0.4,\ 0.3,\ 0.3) \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} = \ & [(0.4)(0.8) + (0.3)(0.1) + (0.3)(0.2), \\ & (0.4)(0.1) + (0.3)(0.7) + (0.3)(0.2), \\ & (0.4)(0.1) + (0.3)(0.2) + (0.3)(0.6)] \end{aligned}$$

$$= (0.41,\ 0.31,\ 0.28)$$

Ejemplo 5: Predicción de la participación futura en el mercado

- La participación de mercado para American Food y Food Mart aumenta, en tanto que para Atlas Foods disminuye.
- Podemos determinar si esto continuará, observando las probabilidades de estado en el futuro.
- Si se considera dos periodos a partir de ahora:

$$\pi(2) = \pi(1)P$$

Como sabemos que

$$\pi(1) = \pi(0)P$$

Tenemos

$$\pi(2) = [\pi(1)]P = [\pi(0)P]P = \pi(0)PP = \pi(0)P^2$$

En general,

$$\pi(n) = \pi(0)P^n$$

Entonces, las probabilidades de estado n periodos en el futuro se obtienen de las probabilidades de estado actuales y la matriz de probabilidades de transición.

Ejemplo 6: Operaciones de maquinaria

El dueño de Maquinaria SA, registró durante varios años la operación de sus fresadoras. En los dos últimos años, 80% de las veces la fresadora funcionaba correctamente en el mes actual, si había funcionado correctamente el mes anterior. Esto también significa que tan solo 20% del tiempo el funcionamiento de la máquina era incorrecto para cualquier mes, cuando estaba funcionando correctamente el mes anterior. Además, se observó que el 90% de las veces la máquina estaba mal ajustada en cualquier mes dado, si estaba mal ajustada el mes anterior. Solamente el 10% del tiempo operó bien en un mes en que el mes anterior no operaba correctamente. En otras palabras, esta máquina puede corregirse cuando no ha funcionado bien en el pasado y esto ocurre 10% de las veces. Estos valores ahora se utilizan para construir la matriz de probabilidades de transición. De nuevo, el estado 1 es una situación donde la máquina funciona correctamente; y el estado 2, donde la máquina no lo hace.

La matriz de probabilidades de transición para esta máquina es:

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$$

donde

P_{11} = 0.8 = probabilidad de que la máquina funcione *correctamente* este mes, dado que funcionaba *correctamente* el mes pasado

P_{12} = 0.2 = probabilidad de que la máquina *no* funcione correctamente este mes, dado que funcionaba *correctamente* el mes pasado

P_{21} = 0.1 = probabilidad de que la máquina funcione *correctamente* este mes, dado que *no* funcionaba correctamente el mes pasado

P_{22} = 0.9 = probabilidad de que la máquina *no* funcione correctamente este mes, dado que *no* funcionaba correctamente el mes pasado

Ejemplo 6: Operaciones de maquinaria

¿Cuál es la probabilidad de que la máquina funcione correctamente dentro de uno y dos meses a partir de ahora?

$$\pi(1) = \pi(0)P$$

$$= (1, 0) \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$$

$$= [(1)(0.8) + (0)(0.1), (1)(0.2) + (0)(0.9)]$$

$$= (0.8, 0.2)$$

Ejemplo 6: Operaciones de maquinaria

¿Cuál es la probabilidad de que la máquina funcione correctamente dentro de uno y dos meses a partir de ahora?

$$\pi(2) = \pi(1)P$$

$$= (0.8,\ 0.2) \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$$

$$= [(0.8)(0.8) + (0.2)(0.1),\ (0.8)(0.2) + (0.2)(0.9)]$$

$$= (0.66,\ 0.34)$$

Condiciones de equilibrio

- Es fácil pensar que con el paso del tiempo todas las participaciones de mercado serán 0 o 1.
- Pero es normal encontrar un porcentaje de equilibrio de los valores o las probabilidades de mercado.
- Se presenta una condición de equilibrio cuando las probabilidades de estado no cambian después de muchos periodos.
- Entonces, en equilibrio, las probabilidades de estado para un periodo futuro deben ser iguales a las probabilidades de estado del periodo actual.
- Las probabilidades de estado en equilibrio se calculan repitiendo el análisis de Markov para un gran número de periodos.

Las condiciones de estado estable existen si las probabilidades de estado no cambian después de un número grande de periodos.

Condiciones de equilibrio

$$\pi(\text{siguiente periodo}) = \pi(\text{este periodo})P$$

$$\pi(n+1) = \pi(n)P$$

En el equilibrio, vemos que

$$\pi(n+1) = \pi(n)$$

Por lo tanto, en el equilibrio,

$$\pi(n+1) = \pi(n)P = \pi(n)$$

De manera que

$$\pi(n) = \pi(n)P$$

o, eliminando el término en n,

$$\pi(n) = \pi P$$

La ecuación establece que, en el equilibrio, las probabilidades de estado para el siguiente periodo son las mismas que las probabilidades de estado para el periodo actual.

Ejemplo 6: Estado de probabilidades para la máquina con 15 periodos

Para la máquina,

$$\pi = \pi P$$

$$(\pi_1, \pi_2) = (\pi_1, \pi_2) \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$$

Aplicando la multiplicación de matrices:

$$(\pi_1, \pi_2) = [(\pi_1)(0.8) + (\pi_2)(0.1), (\pi_1)(0.2) + (\pi_2)(0.9)]$$

El primero y segundo términos del lado izquierdo, π_1 y π_2, son iguales a los primeros términos del lado derecho:

$$\pi_1 = 0.8\pi_1 + 0.1\pi_2$$
$$\pi_2 = 0.2\pi_1 + 0.9\pi_2$$

Las probabilidades de estado deben sumar 1:

$$\pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_n = 1$$

PERIODO	ESTADO 1	ESTADO 2
1	1.000000	0.000000
2	0.800000	0.200000
3	0.660000	0.340000
4	0.562000	0.438000
5	0.493400	0.506600
6	0.445380	0.554620
7	0.411766	0.588234
8	0.388236	0.611763
9	0.371765	0.628234
10	0.360235	0.639754
11	0.352165	0.647834
12	0.346515	0.653484
13	0.342560	0.657439
14	0.339792	0.660207
15	0.337854	0.662145

Ejemplo 6: Estado de probabilidades para la máquina con 15 periodos

Para la máquina :

$$\pi_1 + \pi_2 = 1$$

De manera arbitraria, se resuelve las siguientes dos ecuaciones:

$$\pi_2 = 0.2\pi_1 + 0.9\pi_2$$

$$\pi_1 + \pi_2 = 1$$

Reagrupando y sustituyendo, se obtiene:

$$\begin{aligned} 0.1\pi_2 &= 0.2\pi_1 \\ \pi_2 &= 2\pi_1 \\ \pi_1 + \pi_2 &= 1 \\ \pi_1 + 2\pi_1 &= 1 \\ 3\pi_1 &= 1 \end{aligned}$$

$\pi_1 = {}^1/_3 = \mathbf{0.33333333}$ $\pi_2 = {}^2/_3 = \mathbf{0.66666667}$

PERIODO	ESTADO 1	ESTADO 2
1	1.000000	0.000000
2	0.800000	0.200000
3	0.660000	0.340000
4	0.562000	0.438000
5	0.493400	0.506600
6	0.445380	0.554620
7	0.411766	0.588234
8	0.388236	0.611763
9	0.371765	0.628234
10	0.360235	0.639754
11	0.352165	0.647834
12	0.346515	0.653484
13	0.342560	0.657439
14	0.339792	0.660207
15	0.337854	0.662145

Ejemplo 2: Proceso estocástico – evolución del clima

El clima en la ciudad de David puede cambiar con rapidez de un día a otro. Sin embargo, las posibilidades de tener clima seco (sin lluvia) mañana es de alguna forma mayor si hoy está seco, es decir, si no llueve. En particular, la probabilidad de que mañana esté seco es de 0.8 si hoy está seco, pero es de sólo 0.6 si hoy llueve. Estas probabilidades no cambian si se considera la información acerca del clima en los días anteriores a hoy.

$\mathrm{X}_t = clima\ de\ la\ ciudad$

Para t = 0, 1, 2…. la variable puede tomar los valores

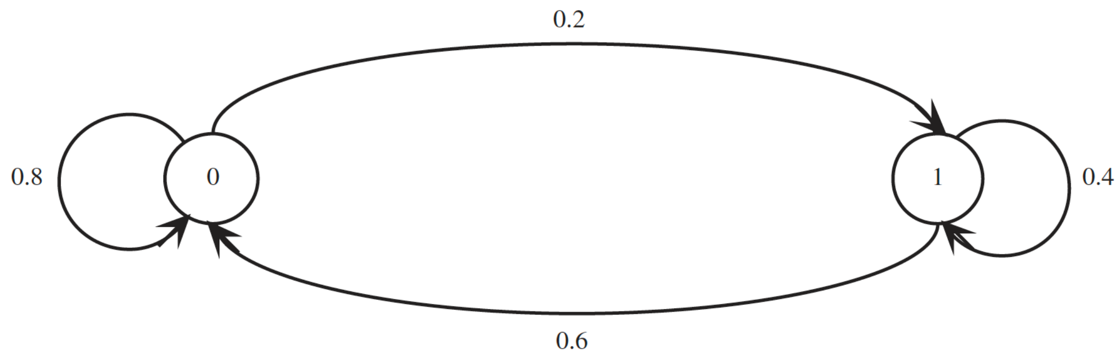
$$\mathrm{X}_t = \begin{cases} 0, & día\ t\ es\ seco \\ 1, & día\ t\ es\ lluvioso \end{cases}$$

El proceso estocástico $\{X_t\} = \{X_0, X_1, X_2, \ldots.\}$ proporciona una representación matemática de la forma en que evoluciona el clima en la ciudad de David a través del tiempo

Ejemplo 2: Matriz y diagrama de transición – evolución del clima

$$p_{00} = P\{X_{t+1} = 0 | X_t = 0\} = 0.8$$
$$p_{10} = P\{X_{t+1} = 0 | X_t = 1\} = 0.6$$

$$p_{00} + p_{01} = 1$$
$$p_{10} + p_{11} = 1$$



La matriz de transición es:

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2: Matriz de transición de n pasos – evolución del clima

Se calcula ahora las diferentes matrices de transición de n pasos a partir de la matriz de transición P (de un paso).

Para iniciar, la matriz de transición de dos pasos es

$$\mathbf{P}^{(2)} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.76 & 0.24 \\ 0.72 & 0.28 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 2: Matriz de transición de n pasos – evolución del clima

Las probabilidades del estado del clima tres, cuatro o cinco días a futuro también se pueden leer de la misma forma a partir de las matrices de transición de tres, cuatro y cinco pasos que se calculan con tres dígitos signifi cativos a continuación

$$\mathbf{P}^{(3)} = \mathbf{P}^3 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.76 & 0.24 \\ 0.72 & 0.28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.752 & 0.248 \\ 0.744 & 0.256 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{(4)} = \mathbf{P}^4 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^3 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.752 & 0.248 \\ 0.744 & 0.256 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.749 & 0.251 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{(5)} = \mathbf{P}^5 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^4 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.749 & 0.251 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.75 & 0.25 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2: Propiedad de estado estable– evolución del clima

Las ecuaciones de estado estable se convierten en

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \pi_0 p_{00} + \pi_1 p_{10}, \\ \pi_1 &= \pi_0 p_{01} + \pi_1 p_{11}, \\ 1 &= \pi_0 \quad\;\; + \pi_1. \end{aligned}$$

Basado en las probabilidades de transición el el sistema de ecuaciones será

$$\begin{aligned} \pi_0 &= 0.8\pi_0 + 0.6\pi_1, & &\text{así} & 0.2\pi_0 &= 0.6\pi_1, \\ \pi_1 &= 0.2\pi_0 + 0.4\pi_1, & &\text{así} & 0.6\pi_1 &= 0.2\pi_0, \\ 1 &= \pi_0 \quad\;\; + \pi_1. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\boxed{\pi_0 = 0.25, \qquad \pi_1 = 0.75}$$

Éstas son las mismas probabilidades que las que se obtuvieron en cada renglón de la matriz de cinco pasos que se calculó previamente, debido a que cinco transiciones probaron ser suficientes para que las probabilidades de estado sean en esencia independientes del estado inicial.

Ejemplo 7: Tiempos de retorno promedio

Cada año, durante la temporada de cultivo de marzo a septiembre, un jardinero realiza una prueba química para verificar la condición de la tierra. Según el resultado, la productividad en la nnueva temporada puede ser uno de tres estados: (1) bueno, (2) regular y (3) malo. Alo largo de los años, el jardinero ha observado que la condición de la tierra del año anterior afecta la productividad del año actual. El jardinero modifica las probabilidades utilizando fertilizante orgánico. El uso de fertilizante puede conducir a mejorar las condiciones del suelo. La matriz de transición sería:

$$P = \begin{bmatrix} 0.30 & 0.60 & 0.10 \\ 0.10 & 0.60 & 0.30 \\ 0.05 & 0.40 & 0.55 \end{bmatrix}$$

a. Dada la condición inicial que la tierra es Buena. Determine las probabilidades absolutas de los tres estados del Sistema después de 1, 8 y 16 temporadas de cultivo
b. Determine la probabilidad de estado estable del problema del jardinero con fertilizante
c. Determine el tiempo de retorno promedio
d. El jardín necesita dos sacos de fertilizante si la tierra es Buena. La cantidad se incrementa en 25% si la tierra es regular, y en 60% si la tierra es mala. El costo del fertilizante es de $50 por saco. El jardinero estuma un rentimiento annual de $250 si no utiliza fertilizante, y de $420 si se aplica el fertilizante. ¿Es rentable utilizar fertilizante?
e. Determine el tiempo de primera visita del estado regular y malo al estado bueno.

Ejemplo 7: Determine las probabilidades absolutas de los tres estados

La condición inicial de la tierra es Buena

$$\pi(0) = [1, 0\ , 0]$$

Probabilidades absoluta de los tres estados del sistema después de 1, 8 y 16 temporadas

Despues de 1 temporada n=1

$$\pi(1) = \pi(0)P$$

$$\pi(1) = [1, 0\ , 0]\begin{bmatrix} 0.30 & 0.60 & 0.10 \\ 0.10 & 0.60 & 0.30 \\ 0.05 & 0.40 & 0.55 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\pi(1) = [0.30, 0.60\ , 0.10]}$$

Despues de 8 temporadas n=8

$$\pi(8) = \pi(0)P^8$$

$$\boldsymbol{\pi(8) = [0.101753, 0.525514\ , 0.372733]}$$

Despues de 16 temporadas n=16

$$\pi(16) = \pi(0)P^{16}$$

$$\boldsymbol{\pi(16) = [0.101659, 0.52454\ , 0.372881]}$$

Lo anterior demuestra que a medida que la cantidad de transiciones aumenta, las probabilidades se vuelven independientes a la condicion inicial $\pi(0)$

Ejemplo 7: Determine la probabilidad de estado estable del problema del jardinero con fertilizante

$$[\pi_1, \pi_2, \pi_3] = [\pi_1, \pi_2, \pi_3] \begin{bmatrix} 0.30 & 0.60 & 0.10 \\ 0.10 & 0.60 & 0.30 \\ 0.05 & 0.40 & 0.55 \end{bmatrix}$$

$$\pi_1 = 0.3\pi_1 + 0.1\pi_2 + 0.05\pi_3$$
$$\pi_2 = 0.6\pi_1 + 0.6\pi_2 + 0.4\pi_3$$
$$\pi_3 = 0.1\pi_1 + 0.3\pi_2 + 0.55\pi_3$$
$$1 = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3$$

$\pi_1 = 0.1017$ $\pi_2 = 0.5254$ $\pi_3 = 0.3729$

Esto significa que a la larga la condición de la tierra será:
Buena 10% del tiempo,
Regular 52% del tiempo y
Mala 37% del tiempo

Ejemplo 7: Determine el tiempo de retorno promedio

Un subproducto directo de las probabilidades de estado estable es la determinación del número esperado de transiciones antes de que el sistema regrese a un estado j por primera vez. Esto se conoce como **tiempo medio del primer retorno** o **tiempo medio de recurrencia**.

$$\mu_{jj} = \frac{1}{\pi_j}$$

Los tiempo medio del primer retorno o tiempo medio de recurrencia son

$$\mu_{11} = \frac{1}{0.1017} = 9.83 \qquad \mu_{22} = \frac{1}{0.5254} = 1.9 \qquad \mu_{33} = \frac{1}{0.3729} = 2.68$$

Esto significa que, en promedio, se requerirá aproximadamente 10 temporadas de cultiva para que la tierra regrese a un buen estado, 2 temporadas para que regrese al estado regular y 3 temporadas para que regrese a un estado malo.

Los resultados apuntan hacia un panorama menos promisorio para la condición de la tierra con el uso de fertilizantes propuesto.

Ejemplo 7: Modelo de costos

El jardín necesita dos sacos de fertilizante si la tierra es Buena. La cantidad se incrementa en 25% si la tierra es regular, y en 60% si la tierra es mala. El costo del fertilizante es de $50 por saco. El jardinero estuma un rentimiento annual de $250 si no utiliza fertilizante, y de $420 si se aplica el fertilizante. ¿Es rentable utilizar fertilizante?

$$Costo\ anual\ esperado\ del\ fertilizante$$

$$= 2 \times \$50 \times \pi_1 + (1.25 \times 2) \times \$50 \times \pi_2 + (1.60 \times 2) \times \$50 \times \pi_3$$

$$= 100 \times 0.1017 + 125 \times 0.5254 + 160 \times 0.3729$$

$$= \$135.51$$

Incremento diferencial del valor annual del rendimiento $= \$420 - \$250 = \$170$

Se recomienda el uso del fertilizante

Ejemplo 7: Determine el tiempo de primera visita del estado regular y malo al estado bueno.

El **tiempo medio de la primera visita** μ_{ij} definido como el número esperado de transiciones para llegar por primera vez all estado j desde el estado i.

Los cálculos tienen su origen en la determinación de la probabilidad de al menos un paso del estado i al estado j, definido como $f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}{}^{n}$, donde $f_{ij}{}^{n}$ es la probabilidad del primer paso del estado i al estado j en n transiciones

1. Si $f_{ij} < 1$, no es seguro que el sistema pase alguna vez del estado i al estado j y $\mu_{ij} = \infty$
2. Si $f_{ij} = 1$, la cadena de Markov es ergódica, y el tiempo medio de la primera visita del estado i al estado j se calcula como:

$$\mu_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}{}^{n}$$

Una forma más sencilla para calcular μ_{ij} consiste en usar la siguiente idea: un retorno del estado i al estado j puede ocurrir en una transición con probabilidad p_{ij} o puede ocurrir al transiter a través de otro estado k con probabilidad p_{ik} seguido por una transición de k a j, ya sea directamente o a través de multiples estados. En el primer caso, la longitud de transición es 1; y en el segundo, la longitude de transición esperada es $1 + \mu_{kj}$. Esto se traduce como:

$$\mu_{ij} - \sum_{k \neq j} \mu_{kj} p_{ik} = 1$$

Ejemplo 7: Determine el tiempo de primera visita del estado regular y malo al estado bueno.

Estas ecuaciones de forma larga se reducen notablemente a la siguiente forma matricial.

$$\left\|\mu_{ij}\right\| = (I - N_j)^{-1}1,\ j \neq i$$

$I = matriz\ identidad\ (m-1)$
$N_j =$ matriz de transición P sin $su\ j - esima\ fila\ y\ j - esima\ columna\ de\ estado\ destino\ j$
$1 = vector\ columna\ (m-1) con\ todos\ los\ elementos\ iguales\ a\ 1$

Ejemplo 7: Determine el tiempo de primera visita del estado regular y malo al estado bueno.

$$P = \begin{bmatrix} 0.30 & 0.60 & 0.10 \\ 0.10 & 0.60 & 0.30 \\ 0.05 & 0.40 & 0.55 \end{bmatrix}$$

Primero se utilizarán las ecuaciones en su forma larga para justificar el uso de la formula matricial dada anteriormente

$$\mu_{21} - 0.60\mu_{21} - 0.30\mu_{31} = 1$$
$$\mu_{31} - 0.40\mu_{21} - 0.55\mu_{31} = 1$$

Estas ecuaciones se escriben de forma matricial como

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.60 & 0.30 \\ 0.40 & 0.55 \end{pmatrix}\right] \mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Continuando,

$$(I - N_j)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.4 & -0.3 \\ -0.4 & 0.45 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 7.50 & 5.00 \\ 6.67 & 6.67 \end{pmatrix}$$

Así que,

$$\begin{pmatrix} \mu_{21} \\ \mu_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.50 & 5.00 \\ 6.67 & 6.67 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12.50 \\ 13.34 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, en promedio se requerirán 12.5 temporadas para pasar de tierra regular a tierra buena, y 13.34 temporadas para pasar de tierra mala a tierra buena

Estados absorbentes y matriz fundamental

- Un estado j es **absorbente** si está seguro de regresar a sí mismo en una transición, es decir $p_{ij} = 1$
- Si se encuentra en un estado donde no podrá pasar a otro en el futuro

Ejemplo de cuentas por pagar

- Un sistema de cuentas por cobrar generalmente ubica las deudas en cuatro estados posibles:

Estado 1 (π_1): pagadas, todas las cuentas

Estado 2 (π_2): deuda incobrable, atrasada por más de tres meses

Estado 3 (π_3): atrasada menos de un mes

Estado 4 (π_4): atrasada entre uno y tres meses

Ejemplo 8: Estados absorbentes y matriz fundamental

	SIGUIENTE MES			
ESTE MES	PAGADA	DEUDA INCOBRABLE	<1 MES	1 A 3 MESES
Pagada	1	0	0	0
Deuda incobrable	0	1	0	0
Menor de 1 mes	0.6	0	0.2	0.2
1 a 3 meses	0.4	0.1	0.3	0.2

Por lo tanto:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 8: Estados absorbentes y matriz fundamental

Para obtener la matriz fundamental, es necesario hacer una partición de la matriz de probabilidades de transición como sigue:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \quad I \downarrow & \qquad\qquad 0 \downarrow \end{array} \\ P = & \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0.6 & 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 & 0.3 & 0.2 \end{array}\right] \\ & \begin{array}{cc} \quad \uparrow A & \qquad\qquad \uparrow B \end{array} \end{array}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 0.4 & 0.1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}$$

donde

I = matriz identidad
0 = matriz solo con ceros

Ejemplo 8: Estados absorbentes y matriz fundamental

La matriz fundamental se calcula como:

$$F = (I - B)^{-1}$$

$$F = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.2 \\ -0.3 & 0.8 \end{bmatrix}^{-1}$$

El inverso de la matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ es $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{r} & \frac{-b}{r} \\ \frac{-c}{r} & \frac{a}{r} \end{bmatrix}$

donde

$$\boldsymbol{r = ad - bc}$$

Ejemplo 8: Estados absorbentes y matriz fundamental

Para obtener la matriz F calculamos:

$$r = ad - bc = (0.8)(0.8) - (-0.2)(-0.3) = 0.64 - 0.06 = 0.58$$

Con esto tenemos:

$$F = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.2 \\ -0.3 & 0.8 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{0.8}{0.58} & \dfrac{-(-0.2)}{0.58} \\ \dfrac{-(-0.3)}{0.58} & \dfrac{0.8}{0.58} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.38 & 0.34 \\ 0.52 & 1.38 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 8: Estados absorbentes y matriz fundamental

Para determinar la cantidad de dinero de deudas incobrables que se esperaría en el largo plazo se multiplica la matriz fundamental por la matriz A

$$FA = \begin{pmatrix} 1.38 & 0.34 \\ 0.52 & 1.38 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 0.6 & 0 \\ 0.4 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$$FA = \begin{pmatrix} 0.97 & 0.03 \\ 0.86 & 0.14 \end{pmatrix}$$

<u>Interpretación para los estados no absorbentes</u>

La probabilidad de que una cantidad con un retraso inferior a un mes sea pagada es de 0.97 y la probabilidad de que una cantidad con un retraso inferior a un mes termine como deuda incobrable es de 0.03

La probabilidad de que una cantidad que tiene uno a tres meses de retraso sea pagada es de 0.86 y de que no sea pagada es de 0.14

Ejemplo 8: Estados absorbentes y matriz fundamental

Podemos usar la matriz FA para contestar preguntas como cuánto de la deuda en la categoría de menos de un mes se pagará, y cuánto se convertirá en deuda incobrable:

$$M = (M_1, M_2, M_3, \ldots, M_n)$$

donde

n = número de estados no absorbentes

M_1 = cantidad en el primer estado o categoría

M_2 = cantidad en el segundo estado o categoría

M_n = cantidad en el n-ésimo estado o categoría

Ejemplo 8: Estados absorbentes y matriz fundamental

Si se supone que hay \$2,000 en la categoría de menos de un mes y \$5,000 en la de uno a tres meses, M sería:

$$M = (2,000,\ 5,000)$$

Cantidad pagada y cantidad de deuda incobrable

$$= MFA$$

$$= (2,000,\ 5,000)\begin{bmatrix} 0.97 & 0.03 \\ 0.86 & 0.14 \end{bmatrix}$$

$$= (6,240,\ 760)$$

Entonces, del total de \$7,000, \$6,240 se pagarán al final y \$760 terminarán como deuda incobrable.

Libros de referencia

- Render, B. (2016). *Métodos cuantitativos para los Negocios*. Editorial Pearson.
- Taha, H. (2011). *Investigación de Operaciones*. Editorial Pearson.
- Hillier, F. & Lieberman, G. (2015). *Investigación de Operaciones*. McGraw-Hill
- Carter, M. et a. (2019). Operations Research – A Practical Introduction. Taylor & Francis Group
- Gohout, W. (2013). Operations Research. Oldenbourg Verlag München
- Rardin, R. (2017). Optimization in Operations Research. Pearson
- Anderson, D. & Sweeny, D. (2019). *Métodos Cuantitativos para los Negocios*. Cengage
- Schroeder et al. (2011). *Administración de Operaciones*. McGraw-Hill
- Render, B. & Heizer, J. (2014). *Principios de Administración de Operaciones*. Pearson
- Chase, R. & Jacobs, F. (2014). *Administración de Operaciones, Producción y Cadena de Suministro.* McGraw – Hill
- Rees, M. (2015). *Business Risk and Simulation Modeling in Practice*. John Wiley & Sons Ltd
- Winston, W. (2017) *Microsoft Excel 2016 – Data Analysis and Busines Modeling*. Microsoft press
- Slack, N., et al. (2016) . *Operations Management*. Pearson
- Stevenson, W. (2015*). Operations Management*. McGraw-Hill

Contacto

Ricardo Caballero, M.Sc.

Docente Tiempo Completo
Facultad de Ingeniería Industrial
Centro Regional de Chiriquí
Universidad Tecnológica de Panamá

E-mail: ricardo.caballero@utp.ac.pa

https://www.academia.utp.ac.pa/ricardo-caballero