Investigación de Operaciones II

Lectura 4

Modelos Determinísticos de Inventario

Profesor:
Ricardo Caballero, M.Sc.
ricardo.caballero@utp.ac.pa

Introducción

- El inventario es uno de los bienes más costosos e importantes para muchas compañías.
- El **inventario** es cualquier recurso almacenado que sirve para satisfacer cualquier necesidad actual o futura.

- Las materias primas, los productos en proceso, y los bienes terminados son ejemplos frecuentes de inventarios.

- La mayoría de las empresas tratan de equilibrar los niveles alto y bajo de inventarios con la finalidad de reducir el costo.
  - Niveles más bajos de inventarios suelen reducir los costos.
  - Los niveles bajos de inventarios pueden provocar faltantes y clientes insatisfechos i.e. **desabasto**

Decisiones de inventario

Para controlar el inventario se debe diseñar una **política de inventario** que responda dos preguntas:

- **¿Cuánto pedir?**
- **¿Cuándo pedir?**

La base del modelo de inventario es la siguiente función de costo genérica:

$$\boxed{\begin{array}{l} Costo\ total\ del\ inventario = \\ Costo\ de\ compra + Costo\ de\ preparación + Costo\ de\ retención + Costo\ por\ escacez \end{array}}$$

Costos del inventario

1. **Costo de compra**: es el precio de un artículo de inventario. En ocasiones, el artículo se ofrece con un descuento si el tamaño del pedido excede una cantidad determinada, lo cual es un factor al momento de tomar la decisión *cuánto pedir.*

2. **Costo de preparación**: representa el cargo fijo en que se incurre cuando se coloca un pedido (no importa su tamaño).

3. **Costo de retención (almacenamiento)**: representa el costo de mantener las existencias de algo. Incluye el interés sobre el capital y el costo de almacenamiento, mantenimiento y manejo

4. **Costo por escasez (faltante)**: es la penalización en que se incurre cuando se agotan las existencias. Incluye la pérdida potencial de ingresos, la interrupción de la producción y el costo subjetivo de perdida de lealtad del cliente

Cuánto ordenar y cuándo ordenar

Cuánto ordenar	Se traduce en determinar el tamaño del pedido en un tiempo de reposición
Cuándo ordenar	Un sistema de inventario puede requerir **Revisiones periódicas** → pedir al inicio de cada semana o mes **Revisiones continuas** → colocando un nuevo pedido cada vez que el nivel de inventario se reduzca a un **punto de reorden**

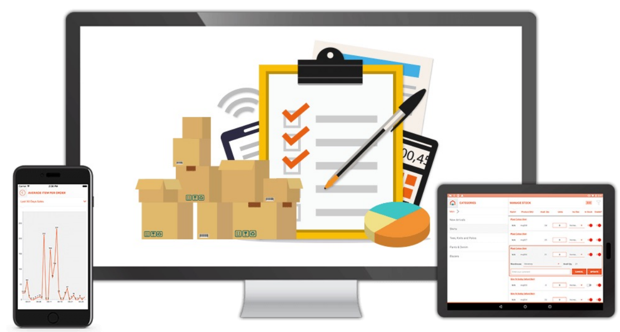
Ejemplo: Tiendas al menudeo
La revisión es periódica si el artículo se repone cada semana o cada mes.
La revision es continua si la reposición ocurre siempre que el nivel del inventario cae por debajo de un nivel determinado

El rol de la demanda en el desarrollo de modelos de inventario

- La complejidad de los modelos de inventario depende de si la demanda es determinística o probabilística

El patrón de la demanda en un modelo de inventario puede asumir uno de cuatro tipos:

1. Determinístico y constante (estático) con el tiempo.
2. Determinístico y variable (dinámico) con el tiempo.
3. Probabilístico y estacionario a lo largo del tiempo.
4. Probabilístico y no estacionario a lo largo del tiempo.



¿Cómo podemos decidir si una determinada aproximación de la demanda es aceptable?

- Se basa en el cálculo de la media y la desviación estándar del consumo durante un periodo específico

- Lineamientos basados en el coeficiente de variacion (C.V.):

1. Si la demanda mensual promedio (registrada a lo largo de varios años) es “de manera aproximada” constante y (C.V.) es razonablemente pequeño (<20%), entonces la demanda puede considerarse determinística y constante
2. Si la demanda mensual promedio varía de manera apreciable entre los diferentes meses pero (C.V.) permanece razonablemente pequeño en todos los meses, entonces la demanda puede considerarse determinística pero variable.
3. Si en el caso 1 (C.V.) es alto (>20%) pero aproximadamente constante, entonces la demanda es probabilística y estacionaria.
4. El caso restante es la demanda probabilística no estacionaria, la cual ocurre cuando los promedios y los coeficientes de variación varían apreciablemente mes con mes.

¿Cómo podemos decidir si una determinada aproximación de la demanda es aceptable?

Los datos que aparecen en la tabla proporcionan el consumo mensual (enero a diciembre) de gas natural en una residencia rural a lo largo de 10 años (1990-1999). El proveedor envía un camión para llenar el tanque a petición del propietario de la casa.

Consumo de gas natural en pies^3

Año	*Ene.*	*Feb.*	*Mar.*	*Abr.*	*May.*	*Jun.*	*Jul.*	*Ago.*	*Sep.*	*Oct.*	*Nov.*	*Dic.*
1990	100	110	90	70	65	50	40	42	56	68	88	95
1991	110	125	98	80	60	53	44	45	63	77	92	99
1992	90	100	88	79	56	57	38	39	60	70	82	90
1993	121	130	95	90	70	58	41	44	70	80	95	100
1994	109	119	99	75	68	55	43	41	65	79	88	94
1995	130	122	100	85	73	58	42	43	64	75	80	101
1996	115	100	103	90	76	55	45	40	67	78	98	97
1997	130	115	100	95	80	60	49	48	64	85	96	105
1998	125	100	94	86	79	59	46	39	69	90	100	110
1999	87	80	78	75	69	48	39	41	50	70	88	93
Media	111.7	110	95	82.5	69.6	55.3	42.7	42.2	62.8	77.2	90.7	98
Desv. Est.	15.54	15.2	7.5	7.99	7.82	3.95	3.4	2.86	6.09	6.91	6.67	6
$V(\%)$	13.91	13.8	7.9	9.68	11.24	7.13	7.96	6.78	9.69	8.95	7.35	6.1

1. El consumo promedio es dinámico (no constante) debido al alto consumo promedio durante los meses invernales.
2. El coeficiente de variación V es pequeño (menor o igual que 15%) de modo que la demanda mensual puede considerarse aproximadamente determinística.

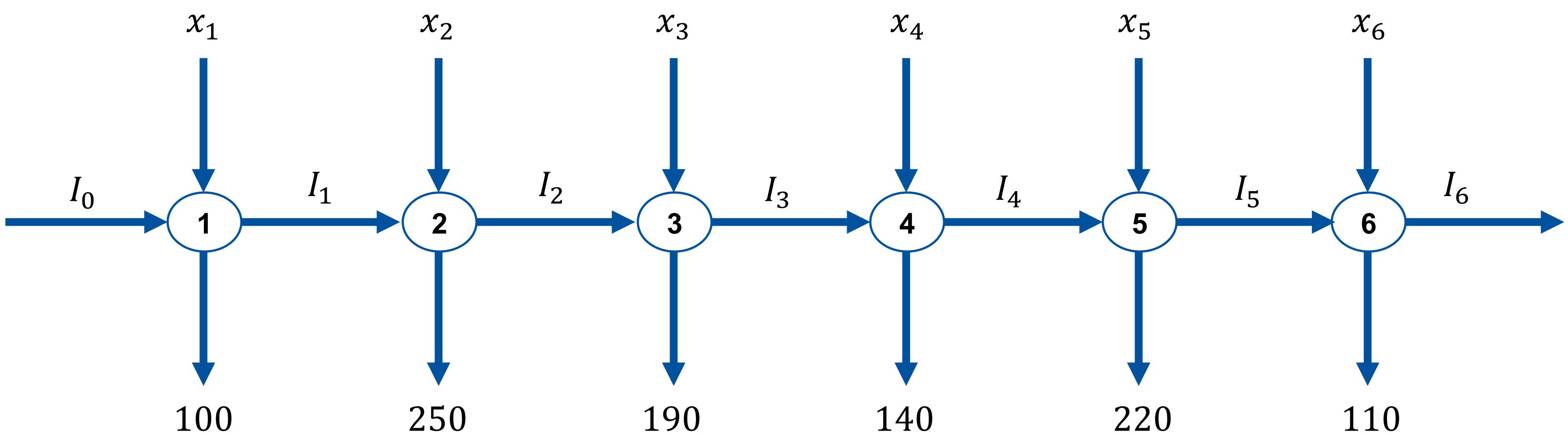
La conclusión es que la demanda mensual es (aproximadamente) determinística pero variable.

Ejemplo 1: Modelo de producción en inventario durante periodos múltiples

- Ventanas S.A., firmó un contrato para entregar 100, 250, 190, 140, 220 y 110 ventanas para casa durante los siguientes seis meses. El costo de producción (mano de obra, material y servicios) por ventana varia por periodo y se estima que será de \$50, \$45, \$55, \$48, \$52 y \$50 durante los próximos seis meses. Para aprovechar las fluctuaciones del costo de fabricación, La empresa puede producir más ventanas de las necesarias en un mes dado y conservar las unidades adicionales para entregarles en meses posteriores. Esto supondrá un costo de almacenamiento a razón de \$8 por ventana por mes, estimado en el inventario de fin de mes. Desarrollo un programa lineal para determinar el programa de producción óptimo

Ejemplo 1: Solución

- El problema desea determinar las relaciones entre cantidades producidas, demanda mensual y el inventario óptimo para los 6 meses de manera que los costos sean mínimos



$= mes$
$x \quad =$ cantidades producidas de producto
$I_0 =$ inventario inicial
$I \quad = inventario\ de\ fin\ de\ mes$

$Inventario\ final$
$=$ cantidad producida $+$ inventario inicial $-$ demanda

Ejemplo 1: Solución

- Las variables de decisión son:

$$x_i = cantidad\ de\ unidades\ producidas\ en\ el\ mes\ i$$
$$I_i = unidades\ que\ quedan\ en\ el\ inventario\ de\ fin\ de\ mes\ i$$

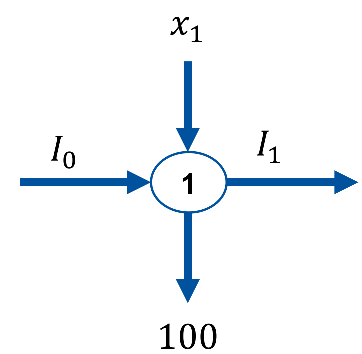
Sea $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

- Se busca en el problema minimizar los costos totales de producción e inventario, por ende la función objetivo sería:

F.O.: MinZ = $\underbrace{50x_1 + 45x_2 + 55x_3 + 48x_4 + 52x_5 + 50x_6}_{\text{Costos totales de producción}} + \underbrace{8(I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6)}_{\text{Costos de unidades en inventario}}$

Ejemplo 1: Solución

- Las restricciones se determinan a partir de la representación gráfica de la relación entre demanda, inventario inicial, inventario final y cantidad de producción. Por consiguiente utilizaremos la siguiente ecuación de balance.



$$Demanda = \text{cantidad producida} + \text{inventario inicial} - \text{inventario final}$$

- Las restricciones son :

$$\begin{aligned}
x_1 - I_1 &= 100 && Mes\ 1 \\
I_1 + x_2 - I_2 &= 250 && Mes\ 2 \\
I_2 + x_3 - I_3 &= 190 && Mes\ 3 \\
I_3 + x_4 - I_4 &= 140 && Mes\ 4 \\
I_4 + x_5 - I_5 &= 220 && Mes\ 5 \\
I_5 + x_6 &= 110 && Mes\ 6
\end{aligned}$$

$$x_i \geq 0 \quad i{=}1,2,3,4,5,6 \quad ; \quad I_i \geq 0 \quad i{=}1,2,3,4,5$$

Ejemplo 1: Solución

- La formulación del problema sería:

F.O.: MinZ = $50x_1 + 45x_2 + 55x_3 + 48x_4 + 52x_5 + 50x_6 + 8(I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6)$

s.a.:

$$x_1 - I_1 = 100$$

$$I_1 + x_2 - I_2 = 250$$
$$I_2 + x_3 - I_3 = 190$$
$$I_3 + x_4 - I_4 = 140$$
$$I_4 + x_5 - I_5 = 220$$
$$I_5 + x_6 = 110$$

$$x_i \geq 0 \quad i=1,2,3,4,5,6 \quad ; \quad I_i \geq 0 \quad i=1,2,3,4,5$$

Modelo de cantidad económica de pedido (EOQ)

Técnica para el control de inventarios que tiene como objetivo disminuir al mínimo los costos totales de ordenar y de mantener el inventario.

Q = Número de unidades por orden
Q^* = Número óptimo de unidades a ordenar (EOQ)
D = Demanda anual en unidades para el artículo en inventario
S = Costo de ordenar o de preparación para cada orden
H = Costo de mantener o llevar inventario por unidad por año

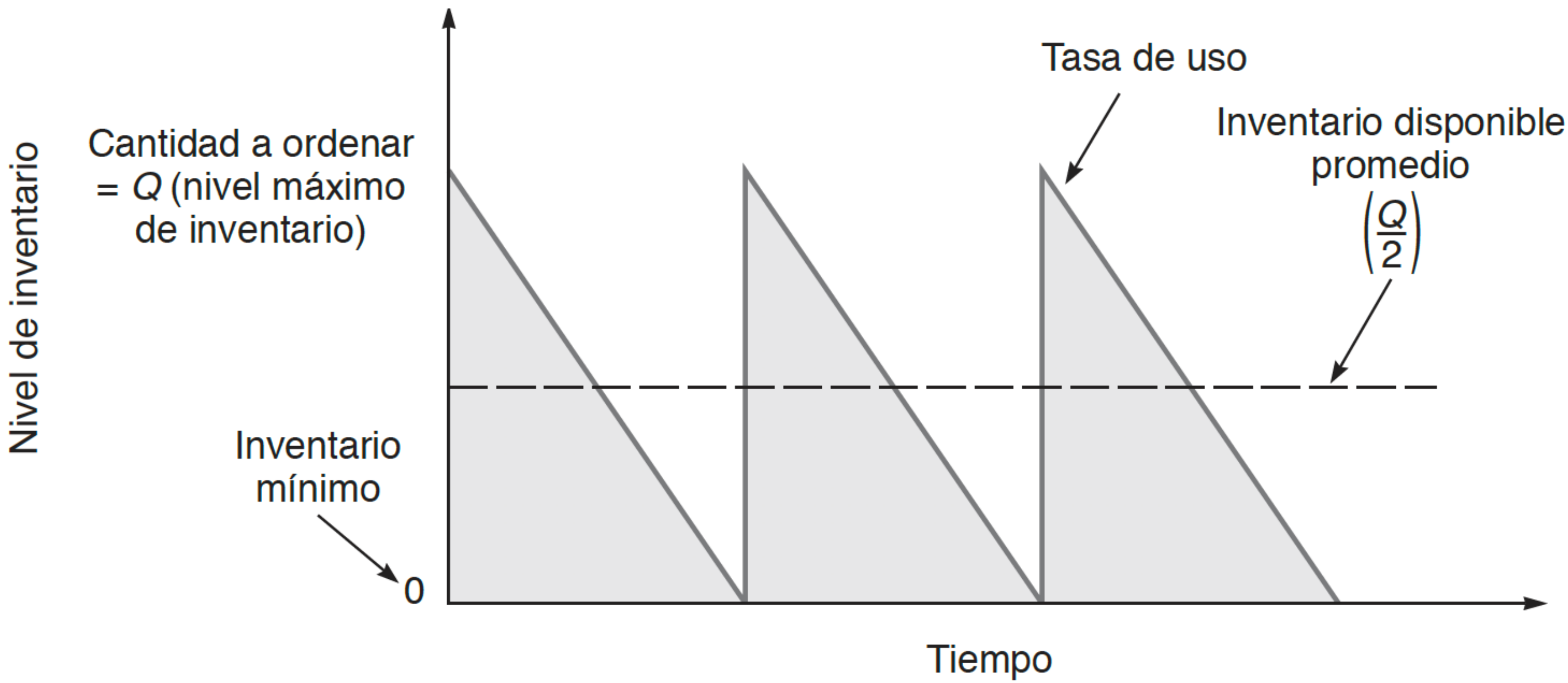
$$\boxed{Q^* = \sqrt{\frac{2DS}{H}}}$$

Ecuación para calcular la EOQ

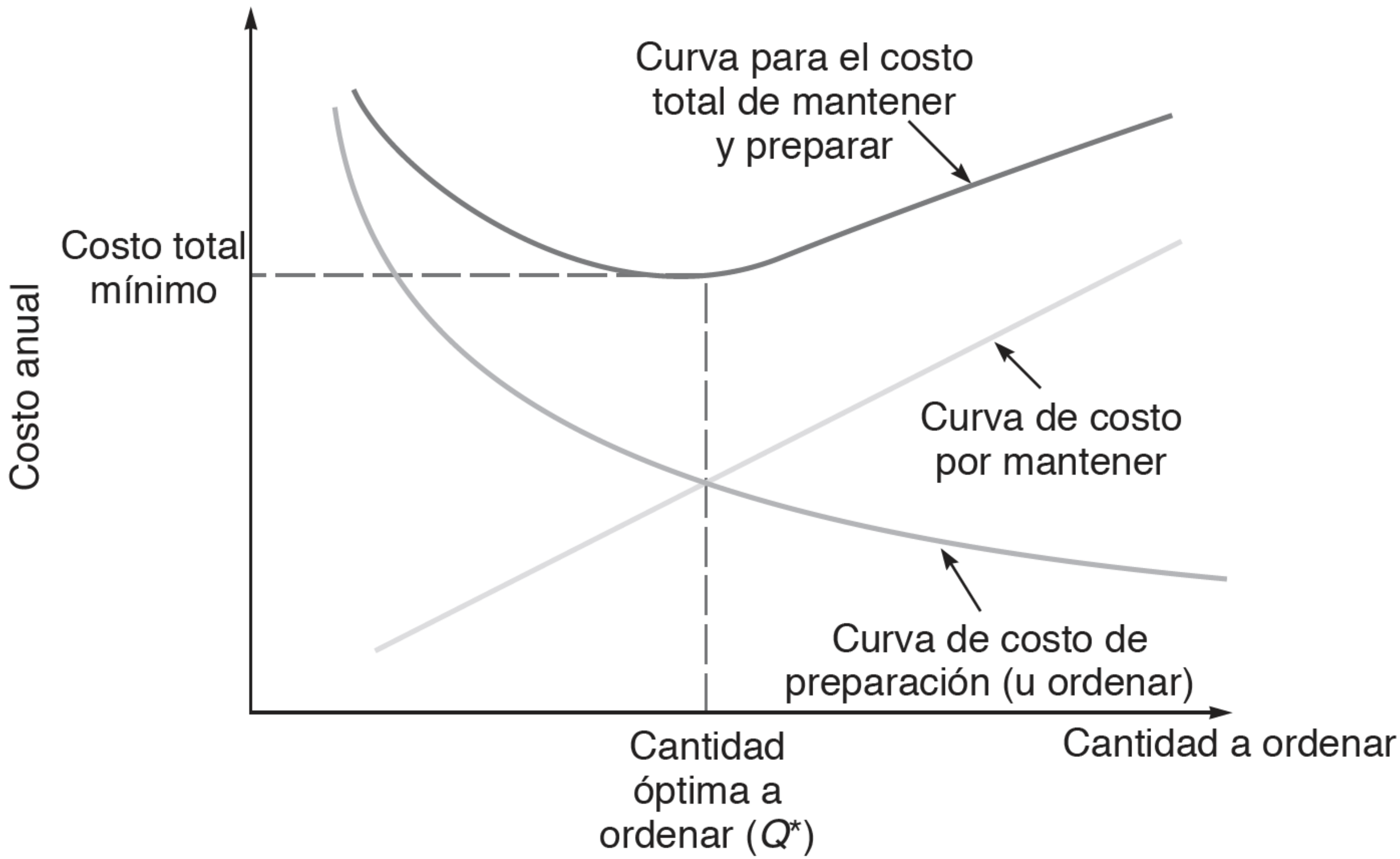
Supuestos:

1. La demanda se conoce y es constante.
2. El tiempo de entrega se conoce y es constante.
3. La recepción del inventario es instantánea.
4. El costo de compra por unidad es constante durante el año.
5. Los únicos costos variables son el costo por colocar una orden (*costo por ordenar*) y el costo por mantener o almacenar el inventario en el tiempo (*costo por almacenar*); estos son constantes durante el año.
6. Las órdenes se colocan de manera que los faltantes se evitan por completo.

Patrón de inventario en el modelo EOQ clásico



Costo total como función de la cantidad económica a ordenar



Costo total de inventario

$$\text{Costo de pedido anual} = (\text{número de pedidos realizados al año})(\text{Costo de pedido por orden})$$
$$= \left(\frac{\text{Demanda anual}}{\text{Número de unidades en cada pedido}}\right)(\text{Costo de pedido por orden })$$
$$= \frac{D}{Q}S$$

$$\text{Costo anual de almacenamiento} = (\text{Inventario promedio })(\text{Costo de almacenamiento por unidad anual})$$
$$= \left(\frac{\text{Cantidad a ordenar}}{2}\right)(\text{Costo de almacenamiento por unidad anual})$$
$$= \frac{Q}{2}H$$

$$\boldsymbol{Costo\ total = costo\ de\ compra + costo\ de\ ordenar + costo\ por\ mantener\ inventario}$$

$$\boxed{TC = DC + \frac{D}{Q}S + \frac{Q}{2}H}$$

Ejemplo 2: Modelo de cantidad económica de pedido (EOQ)

Considere la situación confrontada por Bebidas Nacionales. Esta empresa distribuye cerveza, vino y bebidas refrescantes. Desde su almacén principal localizado en Chiriquí Bebidas Nacionales abastece a casi 1000 minoristas de productos embotellados.

El inventario de cerveza, el cual constituye aproximadamente 40% del inventario total de la empresa, promedia aproximadamente 50,000 cajas por año. Con un costo promedio por caja de aproximadamente $8, Bebidas Nacionales calcula que el valor de su inventario de cerveza es de $400,000. Existe un costo de interés por capital empleado en el inventario. Este costo se estima a una tasa annual del 18 %. Los costos como seguros por hurtos, costos por roturas y costos indirectos se estiman a una tasa annual de aproximadamente 7%. Un análisis del proceso de compra mostró demuestra que que un comprador pasa 45 minutos preparando y procesando un pedido de Cerveza Chiricana. Con un costo por salario y prestaciones de los compradores de $20 por hora, la parte de la mano de obra del costo de ordenar es de $15. Los costos de de papelería, encomienda, teléfono, transporte y recibo se estiman en $17 por pedido

El gerente del almacén decidió realizar un estudio detallado de los costos de inventario asociado con Cerveza Chiricana, el vendedor número uno de cerveza Bebidas Nacionales. El objetivo del estudio es establecer las decisiones de cuánto y cuándo ordenar para Bebidas Nacionales, que den como resultado el menor costo total posible. Considere que se trabajan 52 semanas al año. Se inicia el análisis a partir de los siguientes datos

Semana	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Demanda (cajas)	2000	2025	1950	2000	2100	2050	2000	1975	1900	2000

Ejemplo 2: Solución

Como el primer paso en estudio, el gerente del almacén obtuvo los siguientes datos de demanda de las últimas 10 semanas:

	Semana	Demanda (cajas)
	1	2000
	2	2025
	3	1950
	4	2000
	5	2100
	6	2050
	7	2000
	8	1975
	9	1900
	10	2000
Cajas totales		**20000**
Cajas promedio por semana		**2000**

Ejemplo 2: Solución

Costo de almacenar (de retención):

Costo de capital a una tasa anual de 18%

Costos de retención, como seguros, impuestos, rotura, hurtos e indirectos = 7%

Por tanto, el costo de retención del inventario de cerveza es
18% + 7% = 25% del valor del inventario

El costo de una caja de Cerveza Chiricana es de $8.

Con una tasa del costo de retención anual de 25%, **el costo de mantener una caja de Cerveza Chiricana en el inventario durante 1 año es de**

0.25($8) = $2.00.

Ejemplo 2: Solución

Costo de ordenar:

La mano de obra del costo de ordenar es de **$15**.

Al considerar un margen por los costos de papelería, encomiendas, teléfono, transporte y recibo **de $17 por pedido**

Bebidas Nacionales paga **$32 por pedido**

Ejemplo 2: Solución

Demanda y cantidad óptima de pedido

$$Demanda\ anual\ = semanas\ laboradas\ al\ año \times demanda\ promedio\ por\ semana$$

$$D\ = 52\ semanas \times 2{,}000\ cajas/semana$$

$$D\ = 104{,}000\ cajas\ por\ año$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DS}{H}} = \sqrt{\frac{2(104{,}000)(32)}{2}} = 1{,}824\ cajas$$

Ejemplo 2: Solución

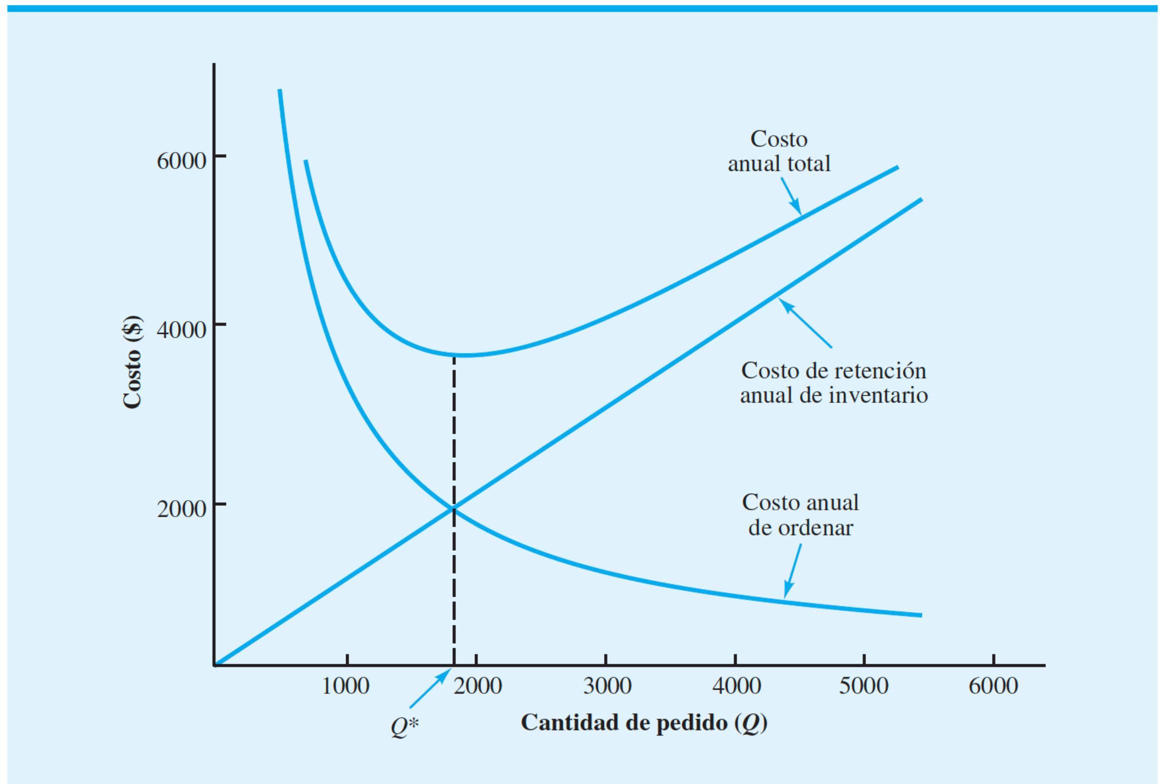
Costo total y cantidad óptima de pedido

$$TC = \frac{D}{Q}S + \frac{Q}{2}H$$

$$TC = \frac{104{,}000}{Q}(32) + \frac{Q}{2}(2)$$

$$TC = \frac{104{,}000}{1{,}824}(32) + \frac{1{,}824}{2}(2)$$

$$\boldsymbol{TC = \$\,3{,}648.56}$$



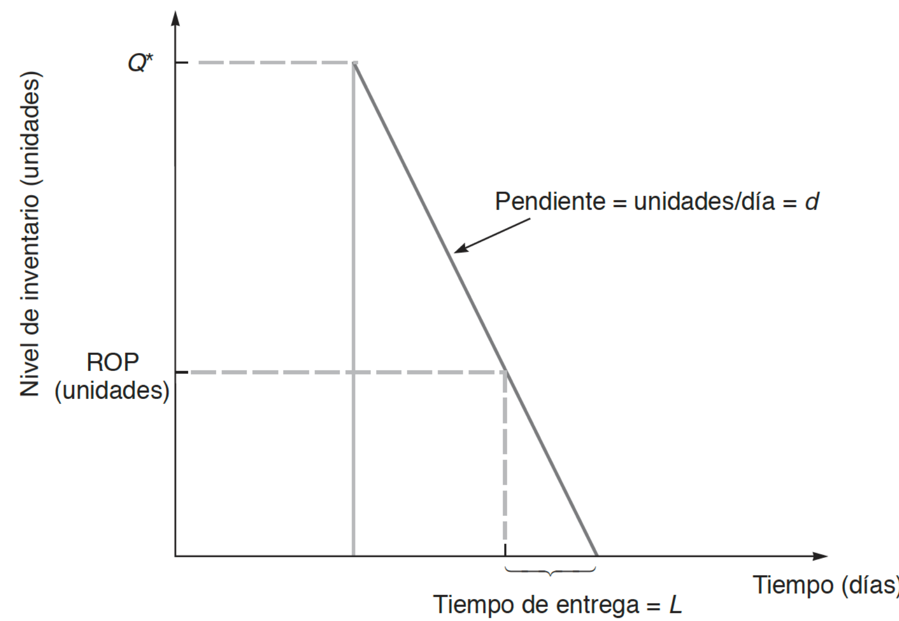
Decisión de cuándo ordenar: Punto de reorden

- **Tiempo de entrega (L)**: en los sistemas de compras, es el tiempo que transcurre entre colocar y recibir una orden; en los sistemas de producción, es el tiempo de espera, movimiento, cola, preparación y corrida para cada componente que se produce
- **Punto de reorden (ROP)**: nivel (punto) de inventario en el cual se emprenden acciones para reabastecer el artículo almacenado.

$$ROP = (demanda\ por\ día)(tiempo\ de\ entrega\ en\ dias\ para\ un\ nuevo\ pedido)$$

$$ROP = d \times L$$

$$d = \frac{D}{Número\ de\ días\ hábiles\ en\ el\ año}$$



Ejemplo 2: **Punto de reorden**

- El fabricante de Cerveza Chiricana garantiza una entrega de dos días de cualquier pedido colocado por Bebidas Nacionales. Por consiguiente, suponiendo que Bebidas Nacionales opera 250 días por año, la demanda es de 104,000 cajas. Determine el punto de reorden, el número de pedidos por año y el tiempo entre pedidos

Ejemplo 2: Solución

Punto de reorden

$$ROP = d \times L$$

$$ROP = 416\ cajas \times 2\ días$$

$$ROP = 832\ cajas$$

$$d = \frac{D}{Número\ de\ días\ hábiles\ en\ el\ año}$$

$$d = \frac{104{,}000\ cajas}{250\ días}$$

$$d = 416\ cajas$$

Por tanto, Bebidas Nacionales debe solicitar un nuevo envío de Cerveza Chiricana al fabricante cuando el inventario sea de 832 cajas.

Número de pedidos por año

$$N = \frac{Demanda}{Cantidad\ ordenada}$$

$$N = \frac{D}{Q} = \frac{104{,}000}{1{,}824}$$

$$N = 57\ pedidos$$

Tiempo entre pedidos

$$T = \frac{Número\ de\ días\ trabajados\ por\ año}{Número\ de\ pedidos\ esperados}$$

$$T = \frac{250}{57} = 4.39\ días\ hábiles$$

Ejemplo 3

Pump, una empresa que vende carcasas para bomba a otros fabricantes, desearía reducir sus costos de inventario, mediante la determinación del número óptimo de carcasas para bomba a obtener por pedido. La demanda anual es de 1000 unidades, el costo de pedido es de $10 por pedido y el costo promedio de almacenamiento por unidad anual es de $0.50. Los números de días trabajados por año son 250. Calcular la cantidad económica de pedido. Determinar el número de pedidos esperados. Determinar el tiempo esperado entre cada pedido. Determinar el inventario promedio. Determinar los costos totales

- Pump vende bombas a otras compañías.
- La empresa quiere reducir sus costos de inventario determinando el número óptimo de bombas por orden.
  - Demanda anual = 1,000 unidades
  - Costo por ordenar = $10 por orden
  - Costo promedio de almacenamiento por unidad por año = $0.50

Ejemplo 3: Solución

$Q^* = 200\ unidades$ $\qquad$ $Número\ de\ días\ trabajados\ por\ año = 250$

Cantidad económica de pedido

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DS}{H}} = \sqrt{\frac{2(1000)(10)}{0.50}} = 200\ unidades$$

Número de pedidos esperados

$$N = \frac{Demanda}{Cantidad\ ordenada} = \frac{D}{Q} = \frac{1000}{200} = 5\ pedidos$$

Ejemplo 3: Solución

$Q^* = 200\ unidades$

$Número\ de\ días\ trabajados\ por\ año = 250$

Tiempo esperado entre cada pedido

$$T = \frac{Número\ de\ días\ trabajados\ por\ año}{Número\ de\ pedidos\ esperados} = \frac{250}{5} = 50\ días\ entre\ cada\ pedido$$

Inventario promedio

$$\frac{Q}{2} = \frac{200}{2} = 100\ unidades$$

Ejemplo 3: Solución

Costo total anual = Costo por ordenar + Costo por almacenar

$$CT = \frac{D}{Q}C_o + \frac{Q}{2}C_h$$

$$CT = \frac{1000}{200}(10) + \frac{200}{2}(0.5)$$

$$CT = 50 + 50$$

$$CT = \$100$$

Costo de compra de los articulos en inventario

- La expresión costo total del inventario se escribe para incluir el costo real de los materiales comprados.
- Dados los supuestos del EOQ, el costo anual de compra es constante e igual a $D \times C$, sin importar la política específica para ordenar, donde
  - C es el costo de compra por unidad.
  - D es la demanda anual en unidades.
- En ocasiones es útil conocer el nivel de inventario promedio en términos monetarios:

$$\boxed{Nivel\ monetario\ promedio = \frac{(CQ)}{2}}$$

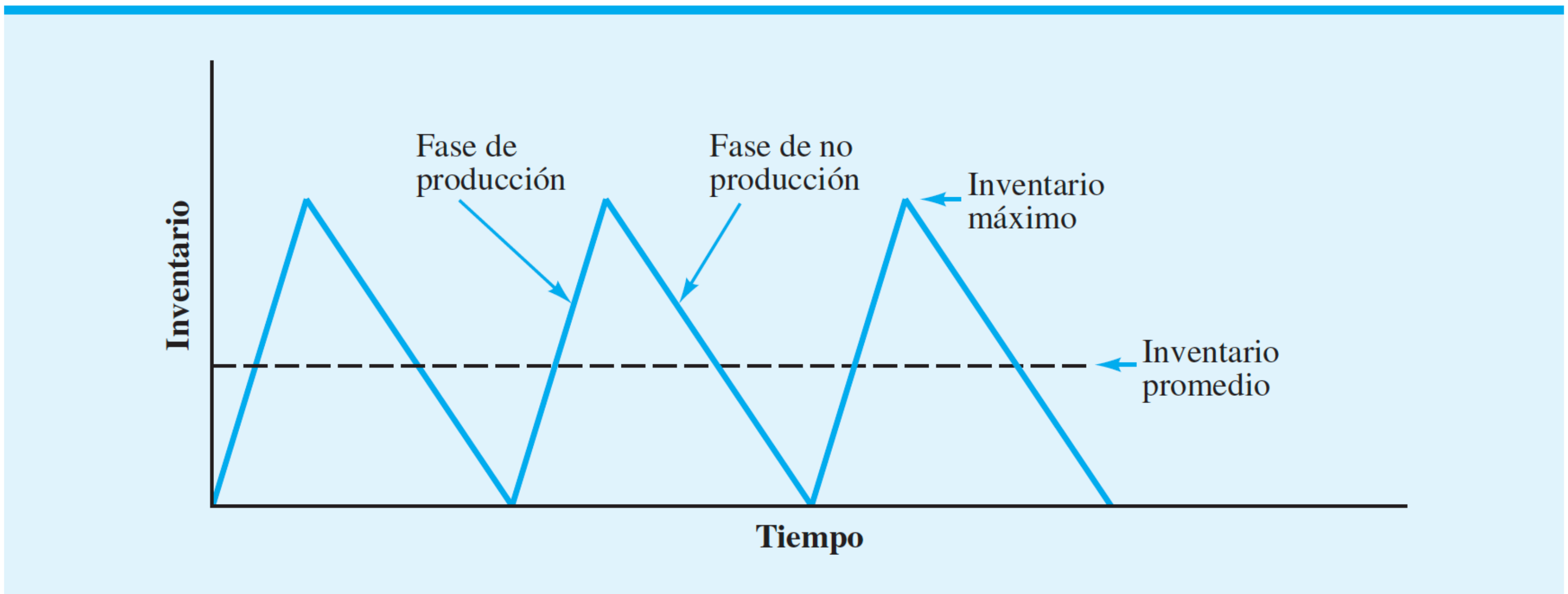
- El costo por almacenar inventario se expresa con frecuencia como un porcentaje anual del costo o precio unitario.
- Esto requiere una nueva variable.

$$I = (cargo\ anual\ por\ mantener\ inventario\ como\ porcentaje\ del\ precio\ o\ costo\ unitario)$$

- El costo por almacenar inventario durante un año es, entones, $H = IC$ así, $Q^* = \sqrt{\frac{2DS}{IC}}$

Modelo de tamaño del lote de producción económico

- Cuando el inventario se acumula con el tiempo, no se aplica el supuesto de *recepción instantánea*.
- Entonces, debe tomarse en cuenta la tasa de demanda diaria.
- Modelo aplicable cuando se producen y se venden unidades al mismo tiempo.
- El modelo modificado se conoce frecuentemente como *modelo de corrida de producción*.



Modelo de tamaño del lote de producción económico

- En el proceso de producción, el *costo por preparación* sustituye el costo por ordenar.
- El modelo utiliza las siguientes variables :

Q = número de piezas por orden o de corrida de producción
S = costo por preparación
H = costo anual por almacenar por unidad
p = tasa de producción diaria
P = tasa de producción anual
d = tasa de demanda diaria
D = tasa de demanda anual
t = magnitud de la corrida de producción en días

Modelo de tamaño del lote de producción económico: costo total y cantidad óptima de producción

$$Costo\ anual\ de\ almacenamiento = \frac{Q}{2}\left(1 - \frac{d}{p}\right)H$$

$$Costo\ anual\ de\ instalación = \frac{D}{Q}S$$

$$Costo\ anual\ total = \frac{Q}{2}\left(1 - \frac{D}{P}\right)H + \frac{D}{Q}S$$

$$Cantidad\ óptima\ de\ producción\ (Q^*) = \sqrt{\frac{2DS}{H\left(1 - \frac{D}{P}\right)}}$$

Ejemplo 4: Modelo de tamaño del lote de producción económico

Se produce jabón de tocador en una línea de producción cuya capacidad annual es de 60,000 cajas. La demanda anual se estima en 26,000 cajas, con la tasa de demanda constante, en esencia, a lo largo del año. La limpieza, preparación y puesta a punto de la línea de producción cuesta aproximadamente $135. El costo de fabricación por caja es de $4.50 y el costo de retención anual se calculó a una tasa de 24%. Tome en cuenta 250 dias habiles y un tiempo de entrega de 5 dias.

a. ¿Cuál es el tamaño del lote de producción recomendado?
b. ¿Punto de reorden?
c. ¿Tiempo de ciclo entre fases de producción?

Ejemplo 4: Solución

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DS}{H\left(1 - \frac{D}{P}\right)}} = \sqrt{\frac{2(26{,}000)(135)}{(1.08)\left(1 - \frac{26{,}000}{60{,}000}\right)}} = 3{,}387\ cajas$$

$$ROP = d \times L = \frac{26{,}000}{250} \times 5 = 520\ cajas$$

$$T = \frac{250Q}{D} = \frac{250(3{,}387)}{26{,}000} = 33\ días\ hábiles$$

Por lo tanto, se tiene que planear una fase de producción de 3387 unidades cada 33 días hábiles

Ejemplo 5: **Modelo de tamaño del lote de producción económico**

Brown Manufacturing fabrica unidades de refrigeración comercial por lotes.

$$\text{Demanda anual } (D) = 10{,}000 \text{ unidades}$$
$$\text{Costo de preparación } (S) = \$100$$
$$\text{Costo de almacenar } (H) = \$0.50 \text{ por unidad por año}$$
$$\text{Tasa de producción diaria } (p) = 80 \text{ unidades diarias}$$
$$\text{Tasa de demanda diaria } (d) = 60 \text{ unidades diarias}$$

1. ¿Cuántas unidades debe producir Brown en cada lote?
2. ¿Cuánto debe durar la parte de producción del ciclo?

Ejemplo 5: Solución

1. ¿Cuántas unidades debe producir Brown en cada lote?

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DS}{H\left(1-\frac{d}{p}\right)}} = \sqrt{\frac{2(10{,}000)(100)}{0.5\left(1-\frac{60}{80}\right)}} = 4{,}000\ unidades$$

2. ¿Cuánto debe durar la parte de producción del ciclo?

$$Ciclo\ de\ producción = \frac{Q}{p} = \frac{4{,}000}{80} = 50\ días$$

Ejemplo 5: Solución

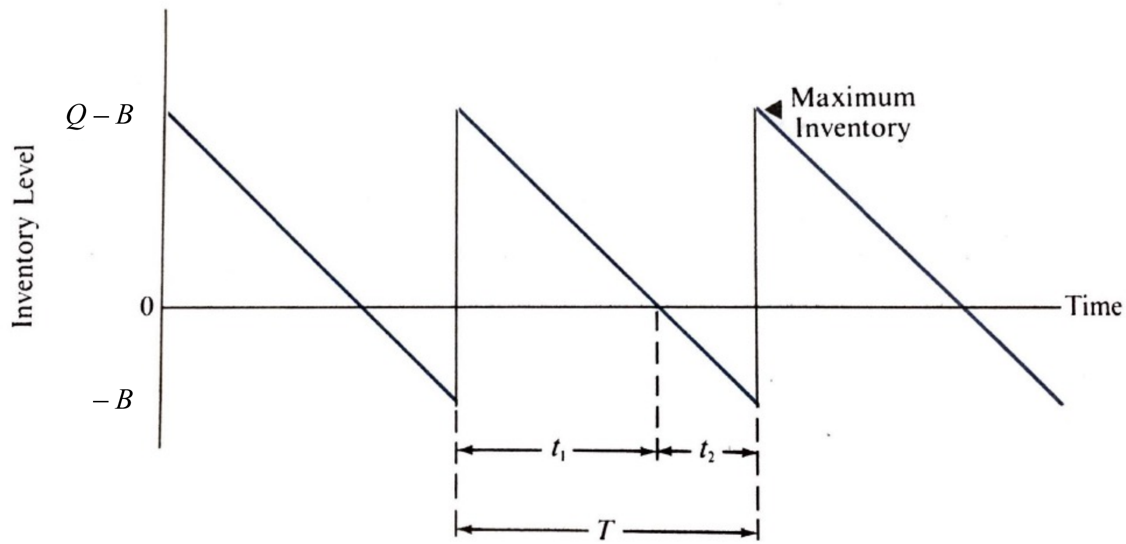
Corridas de producción por año

$$\frac{D}{Q} = 2.5$$

Cuando Brown decida producir unidades de refrigeración, el equipo se configurará para la fabricación de las unidades necesarias para un periodo de tiempo de 50 días. El número de corridas de la producción por año es 2.5, esto significa que habrá 3 corridas de producción en un año con un poco de inventario sobrante para el próximo año.

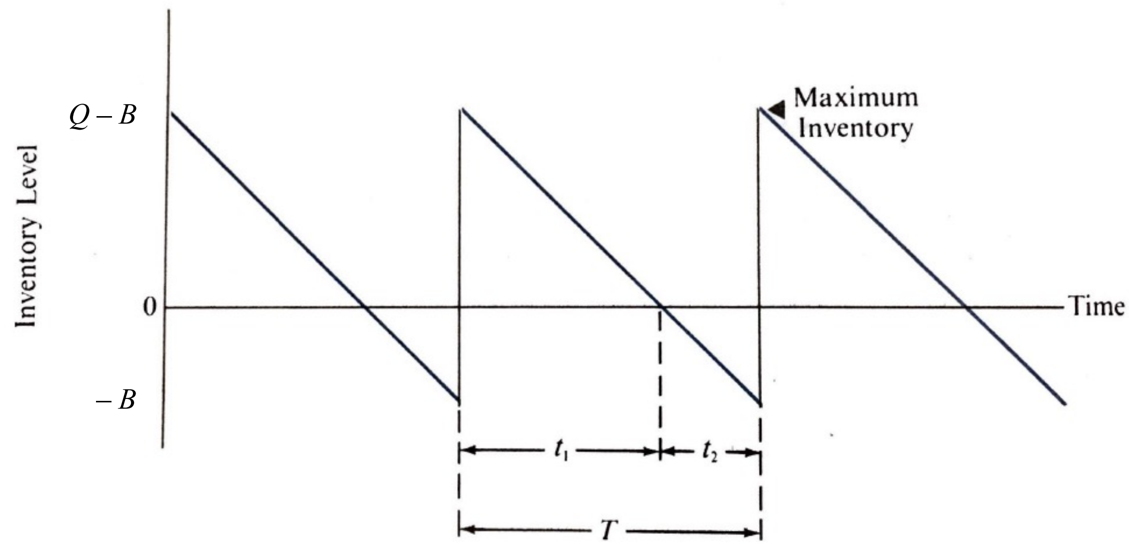
Modelo de inventario con faltantes planeados

- Si los clientes aceptan que hayan faltantes, es decir, que su pedido se satisfaga despuès, cuando no se tiene artículo en almacén, entonces la venta no se pierde
- Cada unidad faltante se le asocia un costo agregado por faltantes
- En un momento dado se tiene un inventario I, ese inventario comienza a consumirse o agotarse a una tasa de demanda d hasta que se acaba. Entonces se permiten pedidos con faltantes por un tiempo t hasta que se alcance una cantidad de pedido B (conocida como backorders / ordenes atrasadas). Una vez se llega a B, llega el nuevo pedido de tamaño Q



Modelo de inventario con faltantes planeados: **Características**

- Con B ordenes atrasadas cuando llega un encargo de tamaño Q, las B ordenes serán enviadas directamente al cliente y el restante Q – B unidades se almacenarán en inventario.
- Q – B será el nivel de inventario máximo
- El ciclo de inventario de T dias sera dividido en dos fases; t1 dias cuando el inventario esta en mano y las ordenes son satisfechas a medida que se solicita y t2 dias cuando hay desabasto y todas las ordenes son tomadas como ordenes atrasadas a satisfacher cuando llegue el lote Q



Modelo de inventario con faltantes planeados: **Fórmulario**

- Costo total annual

$$TC = \frac{D}{Q}S + \frac{(Q-B)^2}{2Q}H + \frac{B^2}{2Q}b$$

- Cantidad económica de pedido

$$Q *= \sqrt{\frac{2DS}{H}\left(\frac{H+b}{b}\right)}$$

- Faltantes planeados

$$B = Q\left(\frac{H}{H+b}\right)$$

- Duración del inventario en mano

$$t_1 = \frac{Q-B}{d}$$

- Duración de la parte de pedido pendiente en el inventario

$$t_2 = \frac{B}{d}$$

- Tiempo de ciclo

$$T = \frac{Q}{d}$$

Ejemplo 6: Modelo de inventario con faltantes planeados

- Suponga que una compañía de Radio tiene un producto para el cual los supuestos del modelo de inventario con faltantes son válidas. La información es la siguiente

$$D = 2000 \; unidades \; por \; año$$
$$I = 20\% \; por \; año$$
$$C = \$50 \; por \; unidad$$
$$S = \$25 \; por \; orden$$

- La compañía esta considerando la posibilidad de permitir algunos faltantes planeados para este producto. El costo anual por faltante ha sido estimado en aproximadamente $30 por unidad por año. Se tienen 250 días hábiles de trabajo
- Calcule la cantidad económica de pedido, el inventario máximo, el tiempo de ciclo y la cantidad de unidades faltantes planeadas así como el costo total de inventario.

Ejemplo 6: Solución

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DS}{H}\left(\frac{h+b}{b}\right)} = \sqrt{\frac{2(2000)(25)}{10}\left(\frac{10+30}{30}\right)} = 115\, unidades$$

$$B = Q\left(\frac{H}{H+b}\right) = 115\left(\frac{10}{10+30}\right) = 29\, unidades$$

$$Inventario\ máximo = Q - B = 115 - 29 = 86\, unidades$$

$$Tiempo\ de\ ciclo\ (T) = \frac{Q}{d} = \frac{115}{8} = 14\, días\ de\ trabajo$$

$$TC = \frac{D}{Q}S + \frac{(Q-B)^2}{2Q}H + \frac{B^2}{2Q}b = \frac{2000}{115}(25) + \frac{(86)^2}{2(115)}(10) + \frac{(29)^2}{2(115)}(30)$$

$$TC = \$867$$

Modelo de descuento por cantidad

- Usualmente existen descuentos por órdenes grandes.
- El modelo EOQ básico se ajusta sumando el costo de compra o el costo de materiales.
- Cuando existen descuentos por cantidad, el costo de adquisición o costo de material se convierten en un costo relevante, puesto que cambia con base en la cantidad ordenada. Los costos totales correspondientes serian

$$Costo\ total\ = Costo\ de\ material + costo\ de\ pedido + costo\ de\ almacenamiento$$

$$Costo\ total\ = DC + \frac{D}{Q}S + \frac{Q}{2}H$$

- Dado que el costo por unidad es ahora variable,

$$Costo\ pot\ almacenar(H) = IC$$

donde,

$$I = costo\ de\ almacenamiento\ como\ un\ porcentaje\ del\ costo\ unitario\ (C)$$

Modelo de descuento por cantidad

- El artículo en inventario puede adquirirse con un descuento si el tamaño del pedido, Q, excede un límite dado, q. Matemáticamente, el precio de compra unitario, C, es

$$Precio\ de\ compra\ unitario = \begin{cases} C_1, & Q \leq q \\ C_2, & Q > q \end{cases} \qquad , C_1 > C_2$$

Tenemos entonces que el costo total por unidad de tiempo es de >

$$TC = \begin{cases} DC_1 + \frac{D}{Q}S + \frac{Q}{2}H\ , & Q \leq q \\ DC_2 + \frac{D}{Q}S + \frac{Q}{2}H\ , & Q > q \end{cases}$$

Modelo de descuento por cantidad

El proceso para determinar la cantidad de costo mínimo se obtiene al realizar los siguientes pasos:

1. Para cada precio con descuento (C), calcule la $EOQ = \sqrt{\frac{2DS}{IC}}$
2. Si la EOQ < Mínimo para el descuento, ajuste la cantidad a Q = Mínimo para el descuento
3. Para cada EOQ o Q ajustada, calcule el $Costo\ total = DC + \frac{D}{Q}S + \frac{Q}{2}H$
4. Elija la cantidad de menor costo

Ejemplo 7: Modelo de descuento por cantidad

La tienda departamental Brass almacena automóviles de juguete. Recientemente recibió un programa de descuentos por cantidad para estos autos. El costo normal de los autos de juguete es de $5. Para pedidos entre 1000 y 1999 unidades, el costo unitario es de $4.80, y los autos para pedidos de 2000 o mas unidades, el costo unitario es de $4.75. Por otro lado, el costo de pedido es de $49 por orden, la demanda anual es de 5000 automóviles y el cargo por almacenar inventario como un porcentaje del costo, I, es de 20% o 0.2.

¿Qué cantidad de pedido minimizará el costo total del inventario?

NÚMERO DE DESCUENTO	CANTIDAD PARA DESCUENTO	COSTO CON DESCUENTO($)
1	0 a 999	$5.00
2	1000 a 1999	4.80
3	2000 y más	4.75

Ejemplo 7: Solución

1. Para cada precio con descuento (C), calcule la $Q = \sqrt{\frac{2DS}{IC}}$

- La demanda es de 5,000 automóviles
- El costo por ordenar es de \$49,
- Costo por almacenar es el 20% del costo del automóvil.

$$Q_1 = \sqrt{\frac{2DS}{IC}} = \sqrt{\frac{2(5000)(49)}{(0.2)(5)}} = 700 \; autos\ por\ pedido$$

$$Q_2 = \sqrt{\frac{2DS}{IC}} = \sqrt{\frac{2(5000)(49)}{(0.2)(4.8)}} = 714 \; autos\ por\ pedido$$

$$Q_3 = \sqrt{\frac{2DS}{IC}} = \sqrt{\frac{2(5000)(49)}{(0.2)(4.75)}} = 718 \; autos\ por\ pedido$$

Ejemplo 7: Solución

2. Si la EOQ < Mínimo para el descuento, ajuste la cantidad a Q = Mínimo para el descuento
   - Ajustar las cantidades que están abajo del rango de descuento permisible.
   - La EOQ del descuento 1 es permisible.
   - Las EOQ de los descuentos 2 y 3 están fuera del rango permisible y tienen que ajustarse a la cantidad mínima posible, para comprar y recibir el descuento:

$$Q_1 = 700\ autos\ por\ pedido$$

$$Q_2 = 1000\ autos\ por\ pedido$$

$$Q_3 = 2000\ autos\ por\ pedido$$

Ejemplo 7: Solución

3. Para cada EOQ o Q ajustada, calcule el $Costo\ total\ = DC + \frac{D}{Q}S + \frac{Q}{2}H$

$Q_1 = 700\ autos\ por\ pedido$ $\quad$ $Costo\ total\ = \$\ 25{,}700$

$Q_2 = 1000\ autos\ por\ pedido$ $\quad$ $Costo\ total = \$\ 24{,}725$

$Q_3 = 2000\ autos\ por\ pedido$ $\quad$ $Costo\ total = \$\ 24{,}822.50$

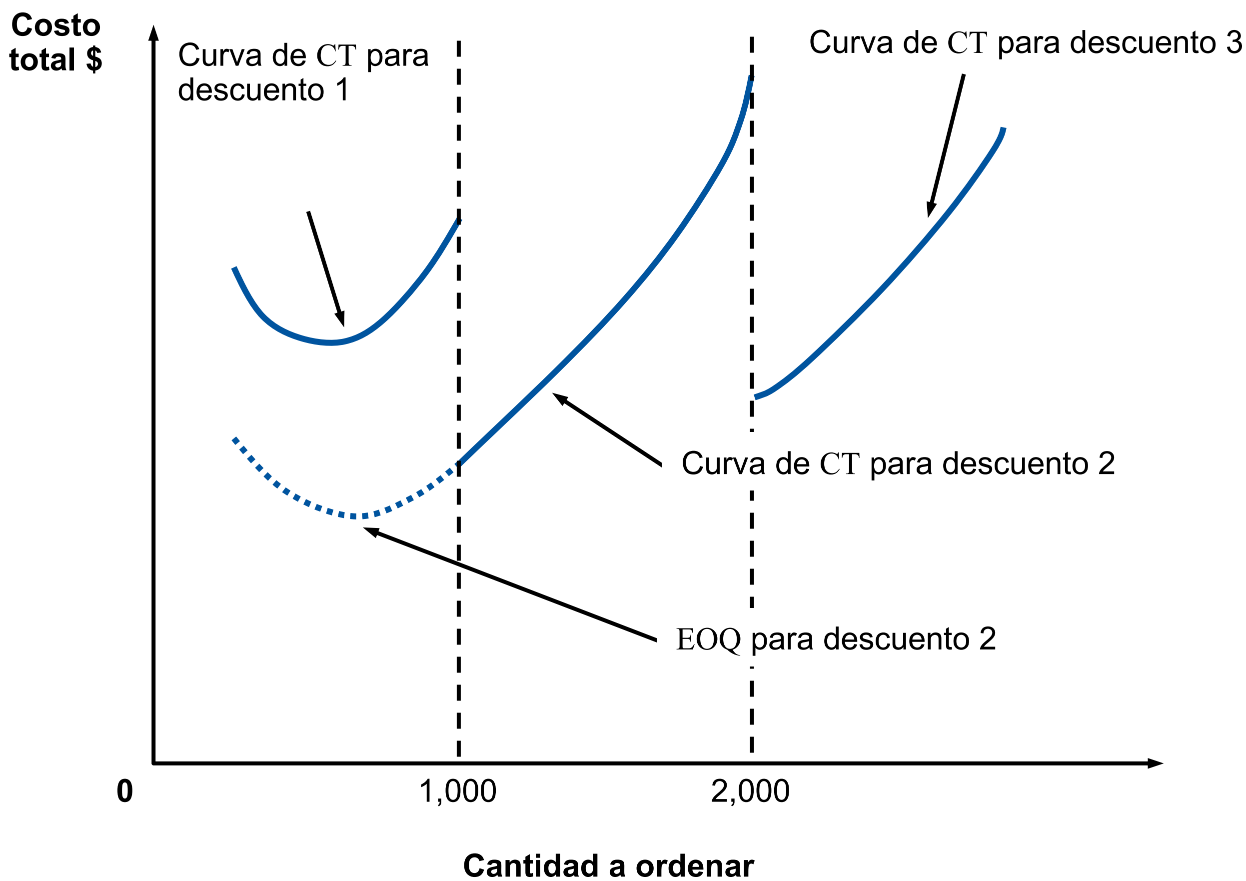
Ejemplo 7: Solución

4. Elegir la cantidad con menor costo

NÚMERO DE DESCUENTO	PRECIO UNITARIO (*C*)	CANTIDAD A ORDENAR (*Q*)	COSTO ANUAL DEL MATERIAL ($) = *DC*	COSTO ANUAL POR ORDENAR ($) = (*D*/*Q*)*S*	COSTO ANUAL POR ALMACENAR ($) = (*Q*/2)*H*	TOTAL ($)
1	$5.00	700	25,000	350.00	350.00	25,700.00
2	4.80	1,000	24,000	245.00	480.00	24,725.00
3	4.75	2,000	23,750	122.50	950.00	24,822.50

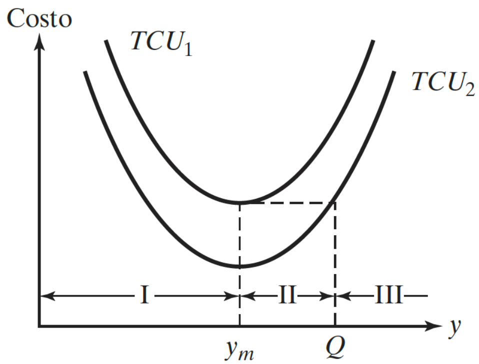
Ejemplo 7:

Curva de costo total para el modelo de descuento por cantidad



Modelo de descuento por cantidad:

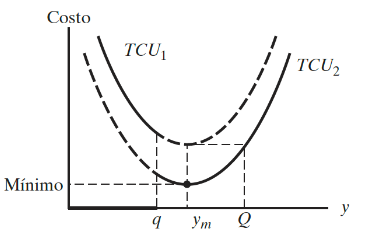
Función de costo de inventario con reducciones de precio



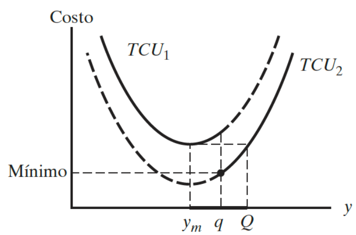
Q

La determinación de la cantidad de pedido óptima Q* depende de dónde queda el punto de reducción de precios q, con respect a las zonas I, II y III, delineadas por los intervalos $(0, Q_1)$, (Q_1, Q_2) y (Q_2, ∞), respectivamente.

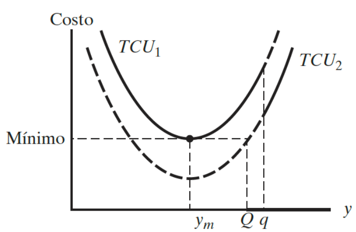
$$TC_2(Q_2) = TC_1(Q_1)$$



Caso 1: q queda dentro de la zona I, $y^* = y_m$



Caso 2: q queda en la zona II, $y^* = q$



Caso 3: q queda en la zona III, $y^* = y_m$

Pasos

1. Determinar Q_1, si el punto de reducción de precios (q) están en la zona I, entonces Q_1será el valor óptimo. De lo contrario vaya al paso 2
2. Determine Q_2 >Q* a partir de la relacion $TC_2(Q_2) = \ TC_1(Q_1)$ que forma una ecuacion cuadratica para encontrar el valor Q que hace la otra funcion igual a 0

Ejemplo 8:
Modelo de descuento por cantidad

LC se especializa en cambios de aceite rápidos. El taller compra aceite automotriz a granel a $3 por galón descontado a $2.50 si la cantidad de pedido es de más de 1000 galones. El taller atiende aproximadamente 150 automóviles por día, y cada cambio de aceite requiere 1.25 galones.
LC guarda el aceite a granel a un costo de $.02 por galón por día. Incluso, el costo de colocar un pedido es de $20. El tiempo de espera es de 2 días para la entrega.

Determine la política de inventario óptima.

Ejemplo 8:
Modelo de descuento por cantidad

$$Q_1 = \sqrt{\frac{2DS}{H}} = \sqrt{\frac{2(20)(187.5)}{0.02}} = 612.38\ galones$$

Como el punto de reduccion q = 1000 es mayor que Q_1 se debe ir al siguiente paso

$$TC_2(Q) = TC_1(Q_1)$$

$$Q^2 + \left(\frac{2(C_2 D - TC_1(Q_1))}{H}\right) Q + \frac{2DS}{H} = 0$$

$$Q^2 + \left(\frac{2\times(2.5\times187.5 - 574.75}{.02}\right) Q + \frac{2\times187.5\times2}{.02} = 0$$

$$Q^2 - 10{,}599.74\ Q + 375{,}000 = 0$$

$$Q_2 = 10{,}564.25$$

$$ROP = d\times L = 2\times187.5 = 375\ galones$$

Zona I = (0, 612.37)

Zona II = (612.37, 10564.25)

Zona III = (10564.25, ∞)

Cantidad económica de pedido con restricciones de espacio

- Este modelo se ocupa de varios artículos cuyas fluctuaciones de inventario individuales siguen el patrón donde no se permiten faltantes
- Los artículos compiten por un espacio de almacenamiento limitado
- Conforme a la suposición de que no se permiten faltantes, el modelo matemático que representa la situacion del inventario se da como

$$Minimizar\ TCU(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{K_i D_i}{Q_i} + \frac{h_i Q_i}{2} \right)$$

$$sujeto\ a$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i Q_i \leq A$$

$$Q_i > 0 \quad i = 1,2, \dots n$$

D_i = tasa de demanda
K_i = costo de preparación
h_i = costo por mantener
a_i = *Requerimiento de área de almacenamiento por unidad de inventario*
A = *Área de almacenamiento máxima disponible*

Ejemplo 9:
Cantidad económica de pedido con restricciones de espacio

Los datos siguientes describen tres artículos de inventario

Artículo i	$K_i(\$)$	D_i (unidades por día)	$h_i(\$)$	$a_i(pies^2)$
1	10	2	0.30	1
2	5	4	0.10	1
3	15	4	0.20	1
Área de almacenamiento total disponible = 25 $pies^2$				

Ejemplo 9:
Cantidad económica de pedido con restricciones de espacio

Para resolver el problema, primero se aborda la situación no restringida encontrando la Q para cada artículo

Artículo i	$\mathrm{K}_i(\$)$	D_i	$h_i(\$)$	$\mathrm{a}_i(pies^2)$	Q_i	$\mathrm{a}_i\mathrm{Q}_i$
1	10	2	0.30	1	11.55	11.55
2	5	4	0.10	1	20	20
3	15	4	0.20	1	24.49	24.49
Total						56.04

$$\sum_{i=1}^{n} a_i Q_i \leq A$$

$$11.55 + 20 + 24.49 \leq 25$$

$$56.04 \leq 25$$

La solución no satisface la restricción

Ejemplo 9:
Cantidad económica de pedido con restricciones de espacio

- Si la solución no satisface la restricción entonces debe utilizarse el multiplicador de Lagrange
- El λ y la EOQ se determina a través de un proceso de ensayo y error con el uso de Excel

$$Q = \sqrt{\frac{2K_iD_i}{h_i - 2\lambda a_i}}$$

$$TCU = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{K_iD_i}{Q_i} + \frac{h_iQ_i}{2}\right) - \lambda\sum_{i=1}^{n}(a_iQ_i - A)$$

Libros de referencia

- Render, B. (2016). *Métodos cuantitativos para los Negocios*. Editorial Pearson.
- Taha, H. (2011). *Investigación de Operaciones*. Editorial Pearson.
- Hillier, F. & Lieberman, G. (2015). *Investigación de Operaciones*. McGraw-Hill
- Carter, M. et a. (2019). Operations Research – A Practical Introduction. Taylor & Francis Group
- Gohout, W. (2013). Operations Research. Oldenbourg Verlag München
- Rardin, R. (2017). Optimization in Operations Research. Pearson
- Anderson, D. & Sweeny, D. (2019). *Métodos Cuantitativos para los Negocios*. Cengage
- Schroeder et al. (2011). *Administración de Operaciones*. McGraw-Hill
- Render, B. & Heizer, J. (2014). *Principios de Administración de Operaciones*. Pearson
- Chase, R. & Jacobs, F. (2014). *Administración de Operaciones, Producción y Cadena de Suministro.* McGraw – Hill
- Rees, M. (2015). *Business Risk and Simulation Modeling in Practice*. John Wiley & Sons Ltd
- Winston, W. (2017) *Microsoft Excel 2016 – Data Analysis and Busines Modeling*. Microsoft press
- Slack, N., et al. (2016) . *Operations Management*. Pearson
- Stevenson, W. (2015*). Operations Management*. McGraw-Hill

Contacto

Ricardo Caballero, M.Sc.

Docente Tiempo Completo
Facultad de Ingeniería Industrial
Centro Regional de Chiriquí
Universidad Tecnológica de Panamá

E-mail: ricardo.caballero@utp.ac.pa

https://www.academia.utp.ac.pa/ricardo-caballero