UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ
FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXACTAS

DIPLOMADO EN HABILIDADES ADMINISTRATIVAS

Matemáticas Básicas Preuniversitarias

Tercera Edición

Magister Marilú Rivera

- junio 2013 -

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

Una de las metas principales en la elaboración de este folleto en su tercera edición de ***Matemáticas Básicas Preuniversitarias***, es ampliar la claridad de los temas presentados para que la capacitación de los estudiantes, sea más fácil y puedan comprender mejor las explicaciones de los conceptos desarrollados.

La experiencia en la enseñanza de la matemática nos ha llevado a concluir que la mayoría de los estudiantes no encuentran interesante esta disciplina, sin embargo reconocemos que la motivación juega un papel importante, es por ello que presentamos una serie de problemas que seguramente será de gran ayuda porque les muestra paso a paso la forma como resolverlos para que puedan repasar y mejorar las diferentes propiedades y técnicas presentadas. Se exponen una variedad de ejemplos que le servirán para percibir y aplicar los conceptos desde diferentes puntos de vista. Al final de cada tema se le da una serie de ejercicios prácticos, que cubren el contenido abarcado. Los mapas conceptuales y esquemas utilizados son un complemento para asegurar la comprensión por parte del estudiante.

No se incluyen demostraciones, y cada tema se presenta de una manera sencilla, abordándose de forma inmediata, estos incluyen los números reales, exponentes y radicales, operaciones con números reales, tanto por ciento, Introducción al álgebra, evaluar expresiones algebraicas, ecuación con una sola variable, desigualdades o inecuaciones lineales y de valor absoluto, conceptos fundamentales de estadística.

Para resolver los problemas que se presentan les recordamos a los estudiantes, no utilizar calculadoras para que se ejercite. Estamos seguras que será de gran efectividad y le ayudará a obtener óptimos resultados.

MÓDULO 1

CONJUNTOS NUMÉRICOS

OBJETIVOS

Al finalizar este capitulo el estudiante será capaz de:

- *Aplicar los conceptos de Números Reales*
- *Plantear y resolver ejemplos aplicando las propiedades de los números reales*
- *Establecer la correspondencia uno a uno entre los números reales y los puntos en la recta numérica real*
- *Aplicar los conceptos de Números Naturales*
- Aplicar los conceptos de Números Enteros
- Aplicar los conceptos de Números Racionales
- Aplicar los conceptos de Números Irracionales
- Resolver problemas de aplicación con los números reales

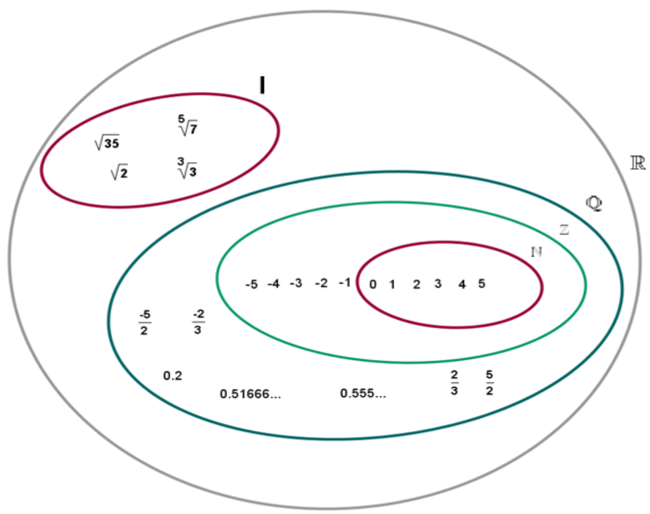
1. CONJUNTOS NUMÉRICOS

Los conjuntos numéricos son agrupaciones de números que guardan una serie de propiedades estructurales. Aquí se listan los principales conjuntos de números. Su conocimiento es indispensable para un dominio básico del Álgebra.

1.1. Números Reales

En este módulo abordaremos los números reales desde un punto de vista muy intuitivo, repasaremos lo referente al *conjunto de los números reales* y sus propiedades aritméticas para poder operar con ellos.

El conjunto formado por los números racionales e irracionales es el conjunto de los *números reales*, se designa por $\mathbb{R}$.



Con los números reales podemos realizar todas las operaciones, excepto la radicación de índice par y radicando negativo, y la división entre cero.

Los números reales se clasifican en:

1.1.1. Números naturales

Un conjunto muy importante de números, con el que sin duda está familiarizado, es el de los números naturales (los números que resultan de contar), que se denota por la letra N y se establece por definición:

DEFINICIÓN

El conjunto de los números naturales es $N = \{ 1, 2, 3,... \}$

Los tres puntos al final de la lista indican que la numeración continúa indefinidamente. (si estos puntos no se hubieran puesto, deberíamos entender que el conjunto consiste solo de estos tres números del total de los números naturales). El conjunto *N* se puede escribir empleando la llamada notación constructiva o de conjunto. Mediante esta anotación escribimos:

N = { x / x **es un número natural** }

Lo cual se lee ***"N* es el conjunto de todas las x tal es que x es un número natural ".** (la raya vertical se lee, " **tal es que "**).

EJEMPLO 1.

Expresar el conjunto de los números naturales menores que 7:

Solución:

a. A = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }   otra forma

b. B = { x / x **es un número natural menor que 7** }

Surge una pregunta ¿Y el número cero? Es posible que hayas observado que el número cero que desempeña un papel muy importante en la matemática, no es un elemento del conjunto ***N*.** Para incluir a dicho número necesitamos formar un conjunto especial agregando el cero al conjunto de los números naturales, resultando así el conjunto de los números enteros no negativos.

1.1.2. *Números enteros*

DEFINICIÓN

El conjunto de los números enteros no negativos es el conjunto $= \{0,1, 2, 3,... \}$

Surge después la necesidad de restar dos números naturales en donde el resultado no es un número natural lo que dio por necesario introducir los números enteros negativos que junto con los números naturales constituyen los números enteros **(Z).**

Ejemplo: 6 – 9 no se podía restar.

Z = {…- 4, - 3, - 2, - 1 , 0, 1 , 2, 3, 4…}

1.1.3. Números racionales

Así como enfrentamos el problema de no poder restar si tenemos sólo números naturales, también enfrentamos el problema de no poder dividir si tenemos sólo números enteros, por lo que es necesario ampliar el conjunto de números. Consideremos ahora el conjunto de los números racionales ***(Q)*** que son aquellos que se pueden escribir como el cociente de dos números enteros **(Z)** donde el denominador no es el cero.

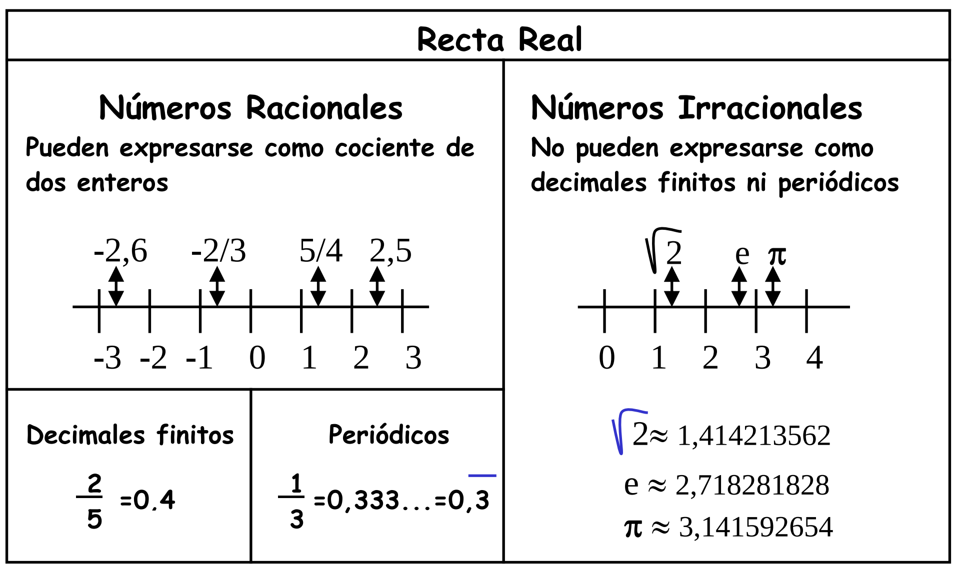
$$Q = \{ \frac{p}{q} \}$$

Una propiedad importante en Q es la *propiedad de densidad*, la cual nos permite afirmar que siempre es posible un número decimal entre dos números decimales dados.

1.1.4. Números Irracionales

Los números racionales son suficientemente buenos para la mayoría de las operaciones que realizamos cotidianamente, sin embargo, ya desde los pitagóricos, en el siglo V a.C, se dieron cuenta de que con una regla y un compás se podían construir segmentos cuya longitud no se podía expresar como cociente de dos números enteros. Por ejemplo el triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1 y la hipotenusa $\sqrt{2}$ y éste número no se puede escribir de la forma racional por lo que es necesario que se introduzcan otros números, llamados números Irracionales. Es así como surgen los números Reales que son la unión de los números *Racionales* e *Irracionales*.

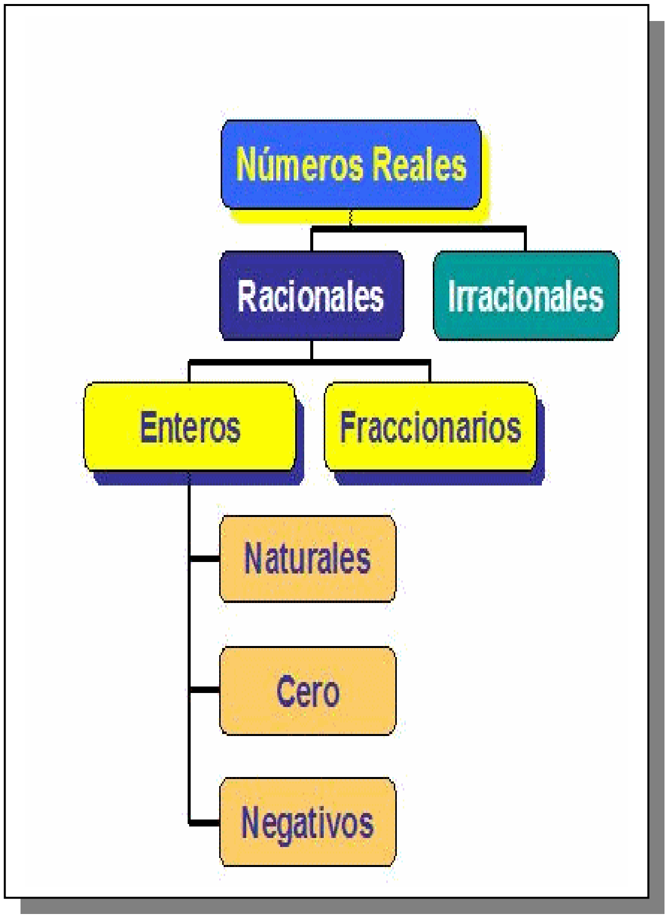
NÚMEROS REALES

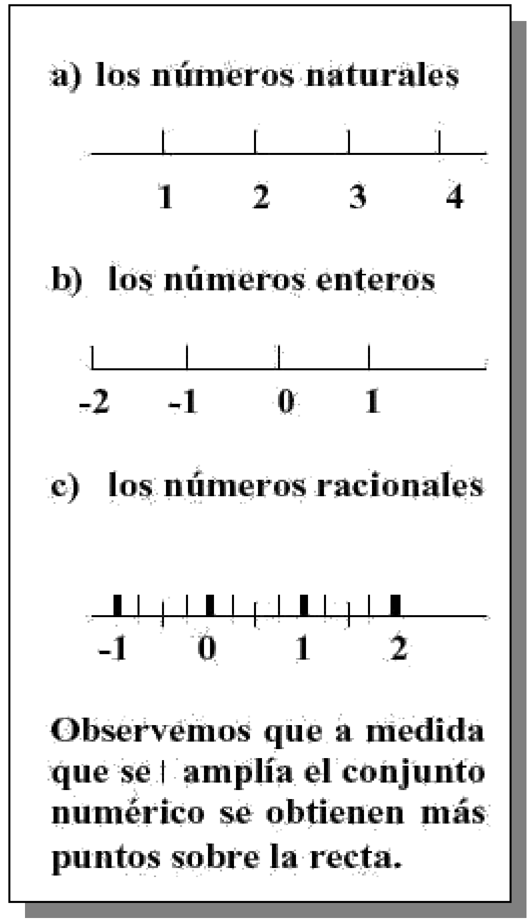


Los números reales se utilizan en todas las fases de la matemática, de allí que es importante que nos familiaricemos con los signos que lo representan.

El siguiente mapa conceptual representa el conjunto de los números reales.

MAPA CONCEPTUAL

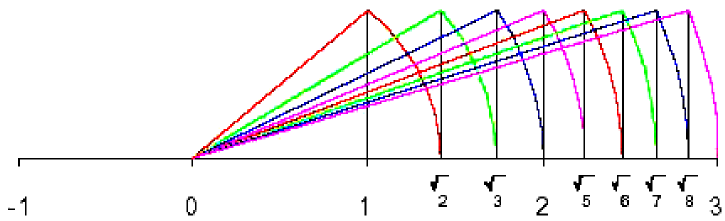




Si representamos todos los números racionales sobre la recta real, quedarán todos muy juntos. Efectivamente es suficiente pensar que dados dos números racionales a y b el número: $\frac{a+b}{2}$

Está entre ellos y además es racional. Sin embargo, si tenemos en cuenta que aún falta ser representados los números irracionales intuimos que en la representación anterior quedan huecos. Pero,¿cómo podríamos representar gráficamente el lugar que ocupan los números :

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$?



¡Propiedad de Densidad!

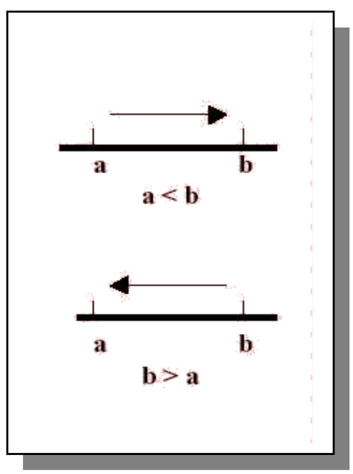
Luego de agregar los puntos que representan a los números irracionales la recta real queda completa.

Los números reales constituyen un conjunto completo. ¡Sin huecos!

Relación de Orden

Como vimos todo número real tiene un punto que lo representa sobre la recta real y sólo uno. Observemos además que tenemos dos sentidos de recorrido sobre la recta.

Consideremos dos números reales cualesquiera a y b con a diferente de b cuya representación es la de la figura.



Si en el recorrido de izquierda a derecha encontramos en primer lugar a "*a*" diremos que a es menor que b.

Notación: a < b

Si en el recorrido de derecha a izquierda encontramos primero a " *b* " diremos que b es mayor que a.

Notación: b > a

a < b es equivalente a b > a

El conjunto de los números reales es entonces un conjunto completo y ordenado.

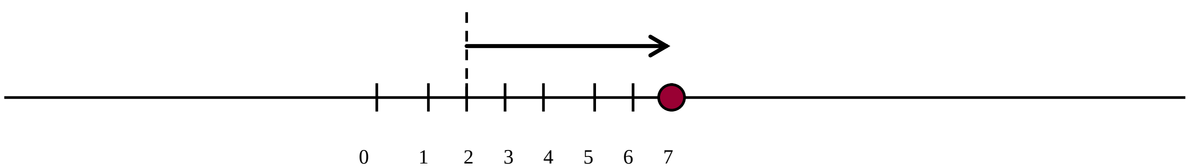
1.2. Operaciones con números reales

En el conjunto de los números reales se encuentran definidas operaciones básicas que son: la suma, la sustracción, la multiplicación, y la división.

1.2.1. Suma y resta de números reales:

1.2.1.1 Interpretación geométrica

Para hallar la suma de 2 y 5 dibujamos una recta numérica, nos colocamos en 2 y nos movemos 5 unidades a la derecha con lo que llegamos a 7.



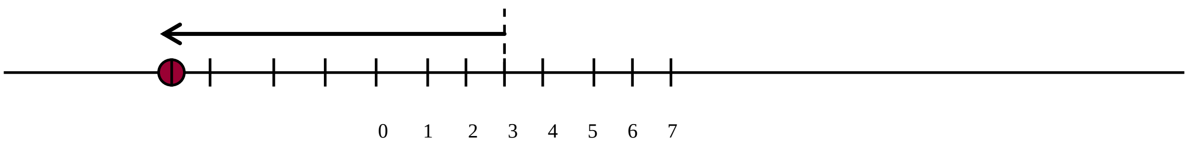
Cuando a un número le sumamos un número *positivo,* entonces nos movemos a la derecha, y cuando lo sumamos un número *negativo,* entonces nos movemos a la izquierda.

Ejemplos:

1. Sumar geométricamente 3 + (-7)

Solución:

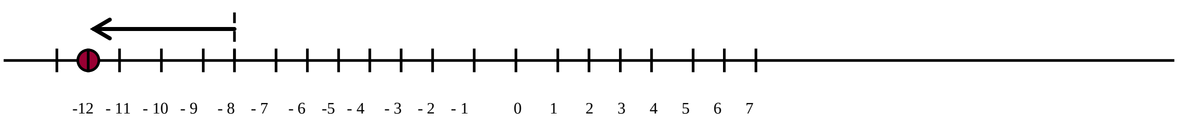
Localizamos el 3 en la recta real y desde ahí nos movemos a la izquierda 7 unidades con lo que llegamos a - 4.



2. Sumar - 8 + (- 4)

Solución:

Localizamos el - 8 en la recta real y desde ahí nos movemos a la izquierda 4 unidades con lo que llegamos a - 12.



1.2.1.2 Interpretación aritmética

Reglas para sumar o restar dos números enteros con el mismo signo

- Se suman los valores absolutos de los números, es decir como si fueran positivos.
- Se determina el signo de la suma:
  – Si ambos son positivos, la suma es positiva.
  – Si ambos son negativos la suma es negativa.

Ejemplo:

Sumar – 35 + (- 82)

Solución: Sumamos valores absolutos de los números: 35 + 82 = 117.

La suma es negativa ya que ambos son negativos: - 35 + (- 82) = - 117

Reglas para sumar dos números enteros de signos contrarios

- Se restan los valores absolutos de los números: el mayor del menor.
- El signo de la suma es el signo del sumando que tenga el mayor valor absoluto:

Ejemplo:

Sumar – 17 + (4)

Solución: Se restan los valores absolutos de los números 17 - 4 = 13.

La resta es negativa ya que 17 es el sumando que tiene mayor valor absoluto: – 17 + (4) = - 13.

Inverso de una suma

- En general si a y b son números enteros, entonces:

  - (a + b) = - a – b

Ejemplos

1. Simplificar - (- 15 + 9)

Solución: *Podemos* efectuar primero la operación dentro del paréntesis y después tomar el inverso aditivo del resultado.

- (- 15 + 9) = - (- 6) = 6

O bien, podemos eliminar el paréntesis poniendo el inverso aditivo de cada sumando y efectuando la operación resultante;

$-(-15 + 9) = +15 - 9 = 6$

2. Simplificar $3 - (7 + 4 - 9)$

Solución:

$$3 - (7 + 4 - 9) = 3 - (2) = 1$$

O bien: $3 - (7 + 4 - 9) = 3 - 7 - 4 + 9 = 1$

Propiedades de la suma de números reales

- Propiedad conmutativa. Si a y b son números reales enteros entonces: $a + b = b + a$
- Propiedad asociativa. Si a, b y c son números reales enteros entonces: $(a + b) + c = a + (b + c)$
- Existencia de elemento neutro aditivo: el número real cero (0) satisface la igualdad $a + 0 = a$ para cualquier número entero a .
- Existencia del opuesto, inverso aditivo o simétrico: Si a es un número entero cualquiera, existe un único número entero al que llamamos – a que satisface la igualdad $a + (-a) = 0$

Reglas para sumar o restar números racionales

Para sumar dos fracciones que tienen, el mismo denominador, se procede a sumar el numerador y se coloca el mismo denominador.

Ejemplos:

1. $\frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{4+3}{5} = \frac{7}{5}$

Cuando tienen denominadores distintos lo que se debe hacer es escribirlos primero con el mismo denominador, amplificando o buscando el M.C.M.

Amplificar una fracción es multiplicar su numerador y su denominador por un mismo número natural.

2. $\frac{4}{5}+\frac{3}{8}=\frac{4\times 8}{5\times 8}+\frac{3\times 5}{8\times 5}=\frac{32}{40}+\frac{15}{40}=\frac{47}{40}$ amplificando

Ejemplos:

3. Reste $\frac{11}{6}-\frac{21}{8}=\frac{11\times 8}{6\times 8}-\frac{21\times 6}{8\times 6}=\frac{88}{48}-\frac{126}{48}=-\frac{38}{48}=-\frac{19}{24}$ amplificando

4. $\left(-\frac{7}{4}\right)+\left(-\frac{4}{7}\right)=\left(-\frac{7\times 7}{4\times 7}\right)+\left(-\frac{4\times 4}{7\times 4}\right)=\left(-\frac{49}{28}\right)+\left(-\frac{16}{28}\right)=-\frac{65}{28}=-2\frac{9}{28}$

El *M.C.M.* de dos o más números es el menor de los múltiplos comunes y el de varios números es el producto de todos los factores primos.

Ejemplo

$\frac{4}{5}+\frac{3}{8}=\frac{4\times 8}{40}+\frac{3\times 5}{40}=\frac{32+15}{40}=\frac{47}{40}$

M.C.M.

$$\begin{array}{l|l} 5-8 & 2 \\ 5-4 & 2 \\ 5-2 & 2 \\ 5-1 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

El M.C.D. = 2^3 x 5 = 40

Cuando resulta una fracción impropia; el numerador es mayor que el denominador; se representa la fracción en número Mixto.

Para transformar a mixto recuerde que se divide el numerador entre el denominador y el residuo se coloca sobre el denominador de la fracción. $\frac{65}{28}=2\frac{9}{28}$

En la resta o sustracción

- Dados dos números reales a y b la diferencia a – b se define como:

a – b = a + (- b) es decir, restar b significa sumar el opuesto de b.

En la resta o sustracción se da la suma, llamada ahora minuendo y un sumando llamado sustraendo y se trata de calcular el otro sumando llamado diferencia:

Ejemplos

1. Restar 9 de 5.

Solución:

Restar 9 significa sumar – 9, así que aplicamos la regla de la suma de dos números de signo contrario:

5 - 9 = 5 + (- 9) = - 4

2. Simplificar 4 - (3 - 1)

Solución:

Resolvemos primero lo que está dentro del paréntesis 3 – 1 = 2 y luego efectuamos la resta: 4 – 2 = 2 es decir:

4 - (3 - 1) = 4 + (-2) = 2

Las fracciones se pueden representar en números decimales.

Ejemplos:

1. $\frac{4}{5} = 1.25$

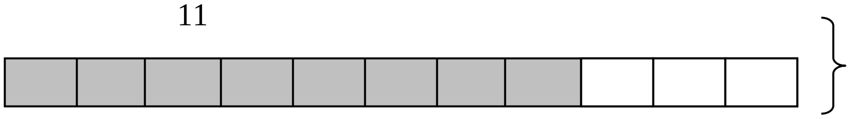
$$\begin{array}{r} 1.25 \\ 4\overline{)5} \\ 10 \\ 20 \\ 0 \end{array}$$

2. Resuelve $0.5 + 0.25 - \frac{1}{2} + 0.75$

$0.5 + 0.25 - 0.5 + 0.75$

$=1$

3. Si tengo $\frac{8}{11}$ ¿Cuánto me falta para tener 1?



1 unidad = $\frac{11}{11}$

La unidad representa el todo, es decir si solo tengo 8 de 11 entonces me faltarían 3 unidades de 11 para completar.

Aritméticamente:

$$\frac{11}{11} - \frac{8}{11} = \frac{3}{11}$$

4. Encuentre las fracciones simplificadas

1. $0.2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$
2. $1.03 = \frac{103}{100}$

1.2.2. Multiplicación de números reales:

En aritmética, usualmente utilizamos el signo X para denotar la multiplicación, pero en algebra hay veces que podemos suprimirlo para simplificar la notación.

– Cuando el signo de multiplicación está junto a un paréntesis, podemos suprimirlo.

(- 4) (- 3) es lo mismo que (- 4) x (- 3)

5 (2+9) es lo mismo que 5 x (2+9)

- *Leyes de los signos de multiplicación*

- El producto de dos números del mismo signo es positivo.
- El producto de dos números de signo contrario es negativo.

Podemos recordar estas reglas con el siguiente cuadro:

(+) (+) = (+)	(-) (-) = (+)
(-) (+) = (-)	(+) (-) = (-)

Ejemplos

1. Multiplicar (-5)2 = - 10
2. Multiplicar (-9) (- 8) = + 72
3. Multiplicar 4 (3 x 6) = 4 x 18 = 72
4. Resolver 5 + 2 x 3 = 5 + 6 = 11

En matemática el orden de jerarquía para resolver operaciones es:

1. *Potencias y raíces*
2. *Multiplicaciones y divisiones*
3. *Sumas y restas*.

- *Reglas para multiplicar números racionales*

Para multiplicar dos fracciones se deben multiplicar los numeradores y colocarlos sobre la multiplicación de los denominadores.

Ejemplos:

Efectúe las multiplicaciones indicadas.

1. $$\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{4\times 3}{5\times 5}=\frac{12}{25}$$

2. $$-\frac{4}{5}\times\frac{3}{8}=-\frac{\cancel{4}\times 3}{5\times\cancel{8}}=-\frac{1\times 3}{5\times 2}=-\frac{3}{10}$$

1.2.3 División de números reales

- *Leyes de los signos de división*

- El cociente de dos números del mismo signo es positivo.
- El cociente de dos números de signo contrario es negativo.

Podemos recordar estas reglas con el siguiente cuadro:

$\left(\frac{+}{+}\right) = (+)$ $\qquad$ $\left(\frac{-}{-}\right) = (+)$

$\left(\frac{-}{+}\right) = (-)$ $\qquad$ $\left(\frac{+}{-}\right) = (-)$

Para dividir dos números fraccionarios multiplicamos la primera por el recíproco de la segunda, que debe ser distinta de cero; así: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$

Ejemplo:

1. Dividir $\frac{2}{3}$ entre $\frac{4}{5}$

$\frac{2}{3}$ es la fracción del dividendo

$\frac{4}{5}$ es la fracción del divisor

$\frac{5}{4}$ es la fracción del divisor invertida.

Aplicando la regla quedaría:

$$\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

2. Dividir $\frac{3}{4} \div \frac{5}{7}$

$$\frac{3}{4} \div \frac{5}{7} = \frac{3}{4} \times \frac{7}{5} = \frac{3 \times 7}{4 \times 5} = \frac{21}{20} = 1\frac{1}{20}$$

PRÁCTICA

I PARTE

Escoja la alternativa correcta realizando las operaciones indicadas.

1 El conjunto de números enteros negativos mayores que -8 es:

- a $\{-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0\}$
- b Ninguna de las otras
- c $\{-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1\}$
- d $\{-8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1\}$
- e $\{-8, -9, -10, -11, \ldots\}$

2 Evalúa $-380 + 14$

- a 366
- b -394
- c Ninguna de las otras
- d 394
- e -366

3 Evalúa $(32) + (-71)$

- a Ninguna de las otras
- b -39
- c 103
- d -41
- e 39

4 Evalúa $\left(4\frac{1}{6}\right) + \left(-10\frac{5}{6}\right)$

- a $-6\frac{2}{3}$
- b -5
- c -7
- d Ninguna de las otras
- e 15

5 Evalúa $(-32) + (71)$

- a -41
- b 103
- c Ninguna de las otras
- d -39
- e 39

6 Evalúa $5.03 + 7.9$

- a Ninguna de las otras
- b 12.93
- c -2.87
- d 2.6
- e -2.6

7 Evalúa $3.2+\frac{16}{5}$

a Ninguna de las otras

b $-\frac{32}{5}$

c 0.64

d $-6\frac{4}{5}$

e 6.4

8 Evalúa $-0.75+\frac{3}{4}$

a $-1\frac{1}{4}$

b $1\frac{1}{2}$

c 0

d Ninguna de las otras

e -1.5

9 Evalúa $-\frac{19}{6}+\left(-\frac{7}{6}\right)$

a -2

b 4

c $-\frac{13}{3}$

d Ninguna de las otras

e $\frac{26}{6}$

10 Evalúa $-\frac{7}{4}+\frac{4}{7}$

a 0

b Ninguna de las otras

c $-\frac{3}{7}$

d $-\frac{33}{28}$

e $\frac{33}{28}$

11 Evalúa $-\frac{14}{5}+\frac{4}{5}$

a $-\frac{18}{5}$

b $\frac{18}{5}$

c $-3\frac{1}{5}$

d -2

e Ninguna de las otras

12 Evalúa $-\frac{13}{4}+\left(-\frac{13}{4}\right)$

a $-\frac{13}{2}$

b Ninguna de las otras

c $6\frac{1}{2}$

d $-\frac{13}{8}$

e 0

II Parte

Resuelva:

1. $\frac{5}{6}-\frac{3}{4}$
2. $\frac{16}{25}-\left(-\frac{3}{10}\right)$
3. $-\frac{7}{16}+\frac{1}{4}$
4. $\frac{1}{12}-\frac{3}{4}$
5. $-\frac{5}{8}-\frac{1}{3}$
6. $-3+\frac{2}{5}$
7. $-\frac{3}{4}-5$
8. $-\frac{2}{3}+\frac{5}{4}+\frac{1}{6}$
9. $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}$
10. $\frac{2}{7}\times\frac{8}{11}\times\frac{7}{9}$
11. $\frac{5}{9}\times 8\times\frac{1}{8}$
12. $8\frac{1}{9}\times 3\frac{2}{3}\times\frac{3}{8}$
13. $\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\right)$
14. $\left(5\frac{1}{3}-2\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{7}{9}-\frac{1}{4}\right)$
15. $\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{7}\right)\times\left(\frac{2}{3}+\frac{6}{4}\right)\times\left(\frac{3}{5}-\frac{2}{5}\right)$

16. $4\frac{1}{4} \div \frac{1}{6}$

17. $7\frac{5}{6} \div 4$

18. $\left(3\frac{1}{2} - 2\frac{3}{4}\right) \div \left(8 + \frac{3}{4}\right)$

19. $\left(\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{8}\right) \div \left(5\,\frac{3}{5} + 2\frac{3}{4}\right)$

20. $\left(11\frac{2}{5} \times \frac{1}{5}\right) \div \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{6}\right)$

21. Hallar la suma de 32.42, 4.85 y 528.268

22. 16.84 x 0.003

23. 17.3 x 4.5 x 0.006

24. $\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}$

25. $\frac{4}{5} - \left(-\frac{1}{3}\right)^2$

26. $-4\left(-\frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)$

27. $1\frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)$

28. $\frac{7}{8} - \left(\frac{4}{5} + 1\frac{3}{4}\right)$

29. – 45.6 +34.7

30. 46.09+(-7.8)

31. – 7.8 + (-6.5)

32. -0.0045+ (-0.031)

33. 16 – (67.2 +6.27)

34. (-7.2 +6.3) – (-3.1 – 4)

35. 60.61 (-0.3)

36. – 0.2(0.3)(- 0.4)

37. $(-199.5) \div (-0.19)$

38. $\dfrac{0.0102}{0.017}$

Respuestas

I PARTE

1) c ; 2) e ; 3) b ; 4) a ; 5) e ; 6) b ; 7) e; 8) c ; 9) c ; 10) d ; 11) d ; 12) a

II PARTE

1) $\frac{1}{12}$; 2) $\frac{47}{52}$; 3) $-\frac{3}{16}$; 4) $-\frac{2}{3}$; 5) $-\frac{23}{24}$; 6) $-\frac{13}{5}$; 7) $-\frac{23}{4}$; 8) $\frac{5}{36}$; 9) $\frac{3}{4}$; 10) $\frac{13}{99}$; 11) $\frac{5}{9}$;

12) $11\frac{11}{72}$; 13) $\frac{39}{40}$; 14) $1\frac{271}{432}$; 15) $\frac{65}{168}$; 16) $25\frac{1}{2}$; 17) $1\frac{23}{24}$; 18) $\frac{1}{15}$;

19) $\frac{4}{501}$; 20) $3\frac{3}{5}$; 21) 565.538; 22) 0.05052; 23) 0.4671 ;

24. $\frac{1}{3}$, 25. $\frac{31}{45}$, 26. $\frac{37}{40}$, 27. $\frac{3}{10}$, 28. $-1\frac{27}{40}$

29) - 10.9 ; 30) 38.29 ; 31) -14.3; 32) – 0.0355; 33) -57.47 ; 34) 6.2 ; 35) - 18.183; 36) - 0.024; 37) 1050 ; 38) 0.6

MÓDULO 2

POTENCIACIÓN Y RADICACIÓN

OBJETIVOS

Al finalizar este capitulo el estudiante será capaz de:

- Aplicar el concepto de potenciación y radicación en la solución de problemas
- Resolver operaciones con potenciación Y radicación aplicando las propiedades
- Estudiar y aplicar las leyes de los exponentes de números reales

2. POTENCIACIÓN Y RADICACIÓN CON NÚMEROS REALES

2.1. Definición de potenciación

Una potencia de exponente n de un factor natural x es un producto de n factores iguales al número x:

$$\mathbf{x^n = \underbrace{x . x . x . x \ldots\ldots x}_{\text{n veces}}.}$$

Donde **n** es un entero positivo y **x** es cualquier número real.

La expresión $\mathbf{x^n}$ se llama una potencia. Consta de dos partes diferentes, x y n; donde **x** es la base y **n** el exponente. Por ejemplo b^3 se lee " *b a la tercera potencia"* o *"b al cubo"*; *3* es el exponente y *b* es la base.

La definición anterior implica que x se utiliza como un factor n veces. De este modo:

$$3^5 = 3 . 3 . 3. 3 . 3$$
$$(-6)^3 = (-6)(-6)(-6)$$
$$-6^3 = -(6)(6)(6)$$
$$(2x)^4 = (2x)(2x)(2x)(2x)$$

Nota: Por convención, la exponente afecta solo al número o expresión que esta directamente a la izquierda del exponente. Es sumamente importante tener esto presente cuando se trabaja con cantidades negativas.

2.2 Propiedades de la Potenciación

Propiedad	Ejemplo
(1) $x^m x^n$	$2^3 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$
(2) $\left(x^m\right)^n = x^{mn}$	$(2^3)^4 = 2^{3 \times 4} = 2^{12} = 4{,}096$
*(3) $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$	$\dfrac{2^5}{2^3} = 2^{5-3}$
*(4) $\dfrac{x^m}{x^n} = \dfrac{1}{x^{n-m}}$	$\dfrac{2^3}{2^5} = \dfrac{1}{2^{5-3}} = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4}$
(5) $(xy)^n = x^n y^n$	$(20)^3 = (2 \times 10)^3 = 2^3\, 10^3 = 8 \times 1{,}000 = 8{,}\ 000$
(6) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n}$	$\left(\dfrac{2}{5}\right)^3 = \dfrac{2^3}{5^3} = \dfrac{8}{125}$
(7) $x^0 = 1$	$3^0 = 1$
(8) $x^{-n} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^n = \dfrac{1}{x^n}$	$3^{-2} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$
(9) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{-n} = \left(\dfrac{y}{x}\right)^n = \dfrac{y^n}{x^n}$	$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^3 = \dfrac{3^3}{2^3} = \dfrac{27}{8}$

Simplificar una expresión cuyas potencias sean números reales quiere decir cambiarla para tener una expresión en la cual cada número real solo aparezca una vez, y que todos los exponentes sean positivos. Se supone, siempre, que los denominadores representan números reales distintos de cero.

Aplicación de las propiedades de la potenciación

2.3. Potenciación fraccionaria o radicación

La potencia fraccionaria se define como:

$$\boxed{x^{1/n} = \sqrt[n]{x}}$$

Se trata de la *raíz n-ésima principal* de un número real x .

Generalizando podemos escribir:

$$x^{m/n} = \left(x^{1/n}\right)^m = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \sqrt[n]{x^m}$$

Ejemplos:

Simplifíquense las siguientes expresiones:

(1) $27^{2/3} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = (3)^2 = 9$

(2) $16^{-3/4} = \dfrac{1}{16^{3/4}} = \dfrac{1}{\left(\sqrt[4]{16}\right)^3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$

(3) $\left(-\dfrac{27}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(-\dfrac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{-\dfrac{8}{27}}\right)^2 = \left(-\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9}$

De esta forma todas las reglas de los exponentes que se han enunciado anteriormente, se cumplen para estos exponentes fraccionarios o radicales.

Sea n un entero positivo mayor que 1, y x un número real.

1. Si x = 0, entonces $\sqrt[n]{x} = 0$

2. xi x > 0, entonces $\sqrt[n]{x}$ es un número real positivo, *y*, tal que *$y^n = x$.*

3 (a) Si x < 0 y n es impar, entonces $\sqrt[n]{x}$ es un número real negativo y, tal que *$y^n = x$.*

(b) Si x < 0 y n es par, entonces $\sqrt[n]{x}$ no es un número real.

Para completar la terminología, la expresión $\sqrt[n]{x}$ es un **radical**, el número ***x*** es el **radicando** o la **cantidad subradical** y el número ***n*** es el **índice o grado** del radical. Al símbolo $\sqrt{}$ se le llama **signo radical**.

2. 4. Propiedades de los radicales

Propiedades	**Ejemplo**
(1) $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}$	$\sqrt{25\times 2} = \sqrt{25}\times\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$
(2) $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$	$\sqrt[3]{\frac{5}{8}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{2}$
(3) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m x n]{x}$	$\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[2x3]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

Las fracciones con radicales se encuentran en forma más sencilla de manejar cuando se racionaliza el denominador. Racionalizar el denominador significa eliminar todos los radicales del denominador, es decir, multiplicamos tanto el numerador como el denominador de la fracción por la raíz n-ésima que aparece en el denominador o por la raíz n-ésima de un número que haga del denominador una potencia n-ésima perfecta.

La operación inversa de la potenciación se llama radicación.

Ejemplos

(1) Como $2^5 = 32$, entonces 2 es la raíz quinta de 32: $\sqrt[5]{32} = 2$

(2) Como $24^2 = 576$, entonces 24 es la raíz cuadrada de 576: $\sqrt{576} = 24$

(3) Simplificar: $\sqrt{\frac{2}{3}}$

$$\sqrt{\tfrac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

(4) Simplifíquense y combínese radicales semejantes $\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$

$$\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4 \cdot 2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{9}}+\frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$= \frac{7\sqrt{6}}{12}$$

2.5. Operaciones básicas con potenciación y radicación

Los radicales no pueden combinarse a menos que sean semejantes, lo cual significa que los radicandos (y los índices) son idénticos.

Un número escrito al frente de otro número y que actúa como multiplicador se llama un *coeficiente*. La expresión *5x* significa, 5 por x ; *yz* significa, y por z, y $7\sqrt{2}$ significa, 7 por $\sqrt{2}$. En estos ejemplos *5* es el coeficiente de *x*; *y* es el coeficiente de *z*; *7* es el coeficiente de $\sqrt{2}$. Los radicales que poseen el mismo índice y el mismo radicando son semejantes. Los radicales semejantes pueden tener diferentes coeficientes al frente del signo radical.

Por ejemplo, $3\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ y $\frac{1}{5}\sqrt{2}$ son radicales semejantes. Cuando un coeficiente no está escrito se sobreentiende que es 1. Entonces el coeficiente de $\sqrt{2}$ es 1.

2.5.1. *Adición y resta* con potenciación y radicación

Si está indicada la adición o resta de radicales semejantes, los radicales se combinan sumando y restando sus coeficientes y colocando su resultado al frente del radical. Sumar $3\sqrt{2}$ y $5\sqrt{2}$ es similar a sumar 3 tuercas y 5 tuercas. Los siguientes ejemplos ilustran la adición y sustracción de expresiones con radicales semejantes:

1. $3\sqrt{2}+5\sqrt{2}=(3+5)\sqrt{2}=8\sqrt{2}$

2. $\frac{1}{2}(\sqrt[4]{3})+\frac{1}{3}\sqrt[4]{3})=(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})\sqrt[4]{3}=\frac{5}{6}\sqrt[4]{3}$

3. $\sqrt{5}-6\sqrt{5}+2\sqrt{5}=(1-6+2)\sqrt{2}=-3\sqrt{5}$

4. $-5(\sqrt[3]{7})-2\sqrt[3]{7}+7\sqrt[3]{7}=(-5-2+7)\sqrt[3]{7}=0\sqrt[3]{7}=0$

2.5.2. *Multiplicación y División*

Si un radical se escribe inmediatamente después de otro radical se entiende que se multiplican. A veces se coloca un punto entre los radicales, pero no siempre. Entonces, $\sqrt{7}\cdot\sqrt{11}$ó $\sqrt{7}\ \sqrt{11}$ significan multiplicación.

Cuando se indica la multiplicación o división de radicales varios radicales que tengan el mismo índice pueden combinarse en un solo radical, si lo desea. Los que poseen el mismo índice se dice que son *radicales del mismo orden*. Por ejemplo, $\sqrt{2}$ es un radical de segundo orden. Los radicales $\sqrt{2}$ y $\sqrt{5}$son del mismo orden.

Si los radicales son del mismo orden los radicandos pueden multiplicarse o dividirse y colocarse bajo un solo símbolo radical. Por ejemplo, $\sqrt{5}$multiplicada por $\sqrt{3}$es lo mismo que $\sqrt{5\times 3}$; además, $\sqrt{6}\div\sqrt{3}$es lo mismo que $\sqrt{6\div 3}$. Si aparecen coeficientes en los radicales éstos también deben unirse en la multiplicación o división. Esto queda ilustrado en los siguientes ejemplos:

1) $2\sqrt{2}\times 3\sqrt{5} =$

$$= (2\times 3)\sqrt{2\times 5}$$
$$= 6\sqrt{10}$$

2) $\dfrac{15\sqrt{6}}{3\sqrt{3}} =$

$$= \frac{15}{3}\sqrt{\frac{6}{3}}$$
$$= 5\sqrt{2}$$

Es importante observar que lo que hemos dicho acerca de la multiplicación y división no se aplica a la adición. Un error típico es tratar la expresión $\sqrt{9+4}$ como si fuera equivalente a $\sqrt{9}+\sqrt{4}$. Estas expresiones no son equivalentes, ya:

$$\sqrt{9+4} \neq \sqrt{9}+\sqrt{4}$$
$$\sqrt{13} \neq 3+2$$

PRÁCTICA

Simplifique las siguientes expresiones:

1. $(-2)^{2}(-2)^{5}$

2. $(7^{3})(7^{8})(7^{4})$

3. $8(-1)^{7}(2(-1)^{2})(-1)$

4. $(2^{8})^{7}$

5. $(-8)^{12}(-8)^{6}$

6. $-1.5\,(4^{5})^{2}$

7. $7(5)\left(\frac{5^{11}}{14}\right)6(5^{2})$

8. $8(-3(-9))\left(\frac{5}{18}(-9)\right)\left(\frac{(-9)^{17}}{10}\right)$

9. $\left(\frac{1}{3}\right)^{6}\left(-12\left(\frac{1}{3}\right)^{9}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{4}$

10. $4\left(\frac{2}{7}\right)^{8}\left(3\left(\frac{2}{7}\right)^{7}\right)^{4}$

11. $-7\left(\frac{3}{5}\right)^{4}\left(\left(\frac{5}{6}\right)^{6}\right)^{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{4}$

12. $\left((0.5)\left(\frac{3}{2}\right)^{4}\right)^{5}$

13. $\left(\frac{2}{3}\right)^{2}$

14. $\left(-\frac{5}{9}\right)^{2}$

15. $\left(\frac{4}{3}\right)^{3}$

16. $\left(-\frac{3}{4}\right)^{3}$

Simplifique y combine radicales semejantes

17. $3\sqrt{5}+2\sqrt{7}-\sqrt{5}$

18. $\sqrt{45}+2\sqrt{20}$

19 $3\sqrt{12}-\sqrt{48}+2\sqrt{27}$

20. $\sqrt{125}+2\sqrt{5}-\sqrt{500}$

21. $\frac{1}{2}\sqrt{32}+2\sqrt{\frac{1}{2}}$

22. $\sqrt[3]{16}+2\sqrt[3]{2}$

23. $\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{8}}$

24. $\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{2\sqrt{12}}{3}$

25. $\sqrt{\frac{1}{6}}-\sqrt{\frac{9}{25}}$

26. $-6\sqrt{81}+5\sqrt{1}$

27. $5\sqrt{49}\;(-2)$

28. $\left(-4\sqrt{36}\right)\left(2\sqrt{4}\right)$

RESPUESTAS:

1. $(-2)^7$, **2.** 7^{15}**,** **3**. 16, **4.** 2^{56} **5.** $(-8)^{18}$, **6.** $-1.5\,(4^{10})$, **7.** $3\,(5^{14})$,
8. $6\,(-9)^{18}$ **9.** $-4\left(\frac{1}{3}\right)^{18}$, **10** $4\,(3^4)\left(\frac{2}{7}\right)^{36}$, **11** $-7\left(\frac{5^{14}}{3^{16}\,2^{16}}\right)$, **12.** $\frac{3^{20}}{2^{25}}$;
13. $\frac{4}{9}$, **14.** $\frac{25}{81}$, **15.** $\frac{64}{27}$, **16.** $-\frac{27}{64}$
17. $2\sqrt{5}+2\sqrt{7}$, **18.** $7\sqrt{5}$, **19.** $8\sqrt{3}$, **20.** $-3\sqrt{5}$, **21.** $3\sqrt{2}$ **,** **22.** $4\sqrt[3]{2}$,
23. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$, **24.** $\frac{17\sqrt{3}}{6}$, **25.** $-\frac{7}{20}$, **26.** -49 **27.** -70 **28.** -96

MÓDULO 3

TANTO POR CIENTO O PORCENTAJE

OBJETIVOS

Al finalizar este capitulo el estudiante será capaz de

- *Definir el concepto de Tanto por Ciento*
- *Convertir un tanto por ciento a su forma decimal y viceversa.*
- *Convertir un tanto por ciento a fracción común y viceversa*
- *Resolver problemas de aplicación sobre porcentajes.*

3. TANTO POR CIENTO O PORCENTAJE

El uso extendido de los decimales y sus operaciones se encuentra en el cálculo de porcentajes. Los porcentajes son fracciones con denominadores de 100 y se expresa con el símbolo %.
El cien por ciento (100%) se considera como un entero (la unidad, el todo inicial); por lo tanto partes menores que el 100% son centésimos de la unidad (no olvidar que se divide en cien partes iguales).

El tanto por ciento es un procedimiento de cálculo que compara diversas magnitudes al cien, es decir, el tanto por ciento consiste en determinar la cantidad que corresponde a otra dada, sabiendo la que corresponde a cien.

3.1 Definición

El tanto por ciento de una cantidad, o porcentaje, es una o varias de las cien partes iguales en que puede dividirse esa cantidad.

3.2 Transformación de un tanto por ciento a su forma decimal

Para transformar un tanto por ciento a la forma decimal, se elimina el signo % y dividimos por cien.

Ejemplos:

1. $7\% = \frac{7}{100}$ = 0.07
2. $15\% = \frac{15}{100}$ = 0.15
3. $132\% = \frac{132}{100}$ = 1.32
4. $3.5\% = \frac{3.5}{100}$ = 0.035
5. $7\,{}^1\!/_2\% = \frac{7\,{}^1\!/_2}{100}$ = 0.07

3.3 Transformación de un decimal a tanto por ciento

Para transformar un decimal a tanto por ciento multiplicamos el decimal por cien y le colocamos el signo de %.

Ejemplos:

1. $0.05 = 0.05 \text{ x } \frac{100}{100} = \frac{5}{100} = 5\ \%$

2. $0.007 = 0.007 \text{ x } \frac{100}{100} = \frac{0.7}{100} = 0.7\ \%$

3. $0.236 = 0.236 \text{ x } \frac{100}{100} = \frac{23.6}{100} = 23.6\ \%$

3.4 Transformación de una fracción común a porcentaje

Una fracción se transforma a tanto por ciento dividiendo el numerador entre el denominador y éste cociente se multiplica por cien.

Ejemplos:

1. $\frac{5}{20} = 0.25 = 25\ \%$

2. $\frac{4}{7} = 0.57143 = 57.143\%$

3. $\frac{12}{5} = 2.4 = 240\ \%$

4. $\frac{3}{8} = 0.375 = 37.5\%$

5. $\frac{5}{6} = 0.833 = 83.3\%$

3.5 Transformación de un porcentaje a una fracción común

Para transformar un tanto por ciento a *una fracción común*, se elimina el signo % dividimos por cien y simplificamos.

Ejemplos:

1. 25 % = $\frac{25}{100} \div \frac{5}{5} = \frac{5}{20}$

2. 75 % = $\frac{75}{100}$ = $\frac{9}{12}$

3. 240 % = $\frac{240}{100} \div \frac{20}{20}$ = $\frac{12}{5}$.

3.6 Problemas de aplicación del tanto por ciento

El tanto por ciento se puede aplicar en problemas de ganancias y pérdidas, en comisiones, descuentos, intereses, etc.

Ejemplos:

1. Un señor tomó prestado B/ 300.00 por un año, por los cuales debe pagar 8% al devolverlos. ¿Cuánto tuvo que pagar al final del año?

Solución:

Significado de 8%:

$\frac{8}{100}$ Significa que en un año la persona pagará B/ 8.00 por cada B/ 100.00 prestados.. Si pidió B/ 300.00 en una año tuvo que pagar de interés:

$\frac{8}{100}$ X 300 = B/ 24.00

Respuesta: Dinero que tuvo que pagar B/ 300.00 + B/ 24.00 = B/ 324.00

2. Si en un curso de matemática de 40 estudiantes el 12 ½ % reprobó, ¿Cuántos estudiantes aprobaron el curso?

Solución:

Cantidad de estudiantes que reprobaron:

12 ½ % = $\frac{12.5}{100}$ X 40 = 5 estudiantes.

Respuesta: Cantidad de estudiante que aprobaron el curso;

40 – 5 = 35 estudiantes.

3. Gasté $16\frac{2}{3}$ % de mi dinero, me quedé con B/ 250.00. ¿Cuánto tenía?

Solución:

Cantidad de dinero que me queda en porcentaje:

100 - $16\frac{2}{3}$% = $83\frac{1}{3}$ %

Dinero que tenía:

Como 250 es el $83\frac{1}{3}$ % de un número, es claro que dicho número es el todo (el100%), entonces, la división 100 $\div$ $83\frac{1}{3}$ = 100 $\div$ $\frac{250}{3}$ = $\frac{300}{250}$ que nos indica el número de veces que el 100% contiene al $83\frac{1}{3}$ %; por lo tanto, el 250 también estará $\frac{300}{250}$ veces en el número, o sea el número buscado es 250 x $\frac{300}{250}$ = 300.

Respuesta: Cantidad de dinero que tenía B/ 300.00

4. ¿Que tanto por ciento de 8,400 es 2,940?
   Como “el todo” es 8400, una de 100 partes iguales (8,400 $\div$100 = 84) el 1%, entonces las veces que esté contenido el 84 en el 2,940 nos dará el porcentaje buscado; esto es, 2,940$\div$ 84=35. por tanto, 2,940 es el 35% de 8400.

PRÁCTICA

I Transforme a decimal los siguientes por cientos

1. 5.7 %	5. 225 %	9. 5.25 %
2. 25 %	6. 3.4 %	10. 0.05 %
3. 139 %	7. 22.4 %	11. 2.5 %
4. 0.1 %	8. 3.075 %	12. 67.8%

II Transforme los siguientes decimales a por ciento

13. 0.8	17. 3.05	21. 6.9
14. 0.09	18. 0.25	22. 0.6
15 7.6	19. 0.4	23. 0.003
16 14.8	20. 3.4	24. 0.04

III Transforme los siguientes tantos por cientos a fracciones comunes

25. 82%	29. 0.74%	33. 457.8%
26. 40%	30. 1.5%	34. 66 2/3 %
27. 8%	31. 1 ½ %	35. 0.35%
28. 2. %	32. 9 ¼ %	36. 3 1/3 %

I V. Transforme cada una de las fracciones comunes a tanto por ciento.

37. ½	41. 8/11	45. 20/100
38. ¼	42. 2/3	46. 5/2
39. 2/5	43. 4/25	47. 15/3
40. ¾	44. 7/5	48. 35/1000

V. Resuelva los siguientes problemas:

49. Una compañía recibe un pedido de 500 vasos de cristal. Si 16 piezas se partieron al transportarlas que porcentaje de los vasos se rompió.

50. Un hombre de un taller recibe una gratificación e B/ 5.25 que es el 17.5% de todo el dinero dispuesto para gratificaciones. A cuánto sumaba ese total?.

51. El Señor Jaén ahorro B/ 2,500.00 en un año, su hijo ahorró B7 1,750.00 en el mismo periodo. ¿Qué porcentaje ahorró el hijo con respecto al padre?

52. En una clase de 35 alumnos, 28 aprobaron el curso. ¿Cuál es el porcentaje aprobado?

53. Una caja pesa el 8% de su contenido. Si el contenido pesa 275 libras, ¿Cuánto pesa la caja?

54. La tarifa de impuesto es de 5%. Si una maquinaria pagó en concepto de impuesto B/ 600.00. ¿Cuál es el valor de la maquinaria?.

55. Al realizar una venta en B/ 30,000.00, el comisionista recibió el 2%. ¿Cuánto cobró en total?

56. Un dependiente vende 100 juegos de cubierto de plata a B/ 200.00 el juego. ¿Cuál es su comisión si ésta es del 12%?

57. Un hombre contesto 28 de 40 preguntas correctamente en la parte escrita del exámen de manejo. Si con 70% se aprueba el examen de manejo se aprueba el exàmen, ¿ Paso el exàmen?

58. Después del primer día de inspección, en una guardería se han regitrado 84 niños. Eso representa 70% de los lugares disponibles. ¿ Cuàl era el número máximo de niños que podía inscribir la guardeía?

59. El costo de reparación de un automóvil después de una colisión fue de B/ 4000.00. La poliza de seguro del automóvil pagó el total de la cuenta exepto el deducible de B/ 200.000 que fue pagado por el conductor. ¿ Que porcentaje del costo pago él?

Respuestas

I Parte

1) 0.057 ; 2) 0.25 ; 3) 1.39 ; 4) 0.001 ; 5) 2.25 ; 6) 0.034 ; 7) 0.224; 8) 0.03075 ;

9) 0.0525 ; 10) 0.0005 ; 11) 0.025 ; 12) 0.678

II PARTE

13) 80%; 14) 9% ; 15) 760%; 16) 1,480% ; 17) 305%; 18) 25%; 19) 40%;

20) 340%; 21) 690% ; 22) 60%; 23) 0.3% ; 24) 4 %

III Parte

25) $\frac{41}{50}$; 26) $\frac{2}{5}$; 27) $\frac{2}{25}$; 28) $\frac{1}{50}$; 29) $\frac{37}{5,000}$; 30) $\frac{3}{200}$; 31) $\frac{3}{200}$; 32) $\frac{37}{400}$

33) $4\frac{289}{500}$; 34) $\frac{2}{3}$; 35) $\frac{7}{2,000}$; 36) $\frac{1}{30}$

IV Parte

37) 50%; 38) 25%; 39) 40% ; 40) 75%; 41) 72.73%; 42) 66.67%; 43) 16%

44) 140%; 45) 20%; 46) 250% ; 47) 500%; 48) 3.5%

V Parte

49) $3\frac{1}{5}$%; 50) B/ 30.00; 51) 70% ; 52) 80% aprobados; 53) 22 libras;

54) B/ 12,000.00 ; 55) B/ 600.00; 56) B/ 2,400.00 ; 57) Si ; 58) 120 ; 59) 5 %

MÓDULO 4

INTRODUCCIÓN AL ALGEBRA

OBJETIVOS

Al finalizar este capitulo el estudiante será capaz de

- Aprender la notación y terminología asociadas con expresiones algebraicas
- Desarrollar habilidades algebraicas
- Plantear y resolver algebraicamente ecuaciones de primer grado con una variable
- Resolver problemas que involucren ecuaciones de primer grado
- Aprender propiedades de orden en las desigualdades
- Resolver algebraicamente desigualdades lineales
- Resolver gráficamente desigualdades lineales
- Resolver algebraicamente desigualdades que involucren valor absoluto
- Operar con suma, resta, multiplicación y división de polinomios

4. INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA

El álgebra es la rama de la matemática que estudia la cantidad considerada del modo más general posible y se construye a partir de la aritmética y con ayuda de la geometría.

Por ejemplo si se compran 5 artículos y cada uno cuesta B/3, lo que debe pagarse se calcula con el producto 5x3=15;pero si la única información que se tiene consiste en que se compraron “algunos” a ese precio, el modelo algebraico será: 3a = z, donde a representa el número de artículos y z el costo total. 5x3 =15 y 3a=z tienen la misma forma; la diferencia está en conocer o no, con toda precisión, las cantidades involucradas.

Como debemos lograr desarrollar habilidades algebraicas, aunque encuentres la solución a los problemas con estrategias aritméticas, trata de construir los modelos algebraicos.

Para construir un modelo algebraico se utilizan:

Cantidades conocidas o de valor fijo, llamadas constantes.

Las variables, cantidades cuyo valor se desconoce, pero de las cuales se sabe cómo se relacionan con otras.

Signos de las operaciones (+,-, x,) y los signos de relación (>, <, =).

4.1 Expresiones algebraicas

Una expresión algebraica es toda combinación de números y letras combinadas entre sí mediante las operaciones fundamentales.

En una expresión algebraica las variables representan números, ya sea números naturales, enteros, racionales o reales, según el contexto. Por tanto, al hacer operaciones con expresiones algebraicas debemos aplicar las mismas propiedades que utilizamos al hacer operaciones con los números reales.

Para representar variables podemos utilizar cualquier letra minúscula, a excepción de :ch, ll, ñ, o y rr, pues su uso puede prestarse a confusiones. Y si las variables van a simbolizar las cantidades que por el momento no conocemos, debemos tener cuidado en dos aspectos:

- Tener perfectamente claro lo que estamos simbolizando, porque puede ocurrir (en un problema que trate, por ejemplo, de edades de niños) que escribamos la variable *a* sin reflexionar en la solución del problema y, a la hora de la verdad, no sabremos si representa la edad de algún niño, o el número de niños involucrados en el problema.
- Usar en cada problema el menor número de variables posibles. Es preferible representar las diversas condiciones del problema con el auxilio de los signos de operación y un mínimo de variables.

Ejemplo

Del dinero que tenía, gasté B/ 5.00 en un cuaderno y B/ 10.00 en carpetas. Me pagaron B/ 35.00 y luego perdí B/ 20.00 en una apuesta. ¿Con cuánto me quedé?

a) Modelo con abuso de variables:

Cantidad de dinero que tenía al principio	*a*
Luego de la compra del cuaderno y las carpetas	*b*
Después de que me pagaron	*c*
Al terminar de pagar la apuesta	*d*

Solución: Por el momento estoy pensando que hacer con a, b, c, y d.

b) Modelo con economía de variables:

La cantidad de dinero que tenía al principio	a
Luego de la compra del cuaderno y las carpetas (si gasto B/ 15.00) en total, debo restarlos a la cantidad inicial)	a - 15
Después de que me pagaron (como recibo B/ 35.00, recupero los B/ 15.00 gastado y tengo B/ 20.00 extras)	a+ 20
Al terminar de pagar la apuesta (pago B/ 20.00, que son precisamente los que me sobraron de la operación anterior)	a

Solución: Quedé con lo mismo que tenía al principio.

Debemos saber que:

- Si *a, b* y *c* son cantidades tales que $a+b = c$, nos resulta $c-b = a$ ó $c-a = b$
- Si m, n y r son cantidades (m y n no son ceros), tales que $mn = r$, nos resulta $\frac{r}{n} = n$ ó $\frac{r}{m} = m$.

4.1.1. Evaluación de expresiones algebraicas.

Evaluar una expresión algebraica significa reemplazar cada variable por un número para obtener un valor numérico.

Ejemplo:

1. Evaluar la expresión (3x – 2) + 2 (7 – x) cuando x = - 3

Solución:

$$
\begin{aligned}
(3x - 2) + 2(7 - x) &= (3(-3) - 2) + 2(7 - (-3)) \\
&= (-9 - 2) + 2(7 + 3) \\
&= (-11) + 2(10) \\
&= -11 + 20 \\
&= 9
\end{aligned}
$$

4.1.2. Términos semejantes

Cuando dos o más términos contienen las mismas variables elevadas a los mismos exponentes, se dicen que son términos semejantes.

8 x^2y	-7x^2y	Son semejantes
4.5 a^3bc	$\frac{2}{3}a^3bc$	Son semejantes
7 x^3y	7 x^2y	No son semejantes
ab^2	a^2b	No son semejantes

Cuando una expresión algebraica tiene dos o más términos semejantes, podemos utilizar la propiedad distributiva de la multiplicación para simplificarla.

Ejemplo:

1. Simplificar: $2x + 3x$

Solución:

$2x + 3x = (2 + 3)x = 5x$

2. Simplificar: $\frac{9}{2}x - 6y + 5x$

Solución: Recuerda que solo podemos agrupar los términos semejantes

$$\frac{9}{2}x - 6y + 5x = \left(\frac{9}{2} + 5\right)x - 6y = \frac{19}{2}x - 6y$$

4.1.3 . *Polinomios*

4.1.3.1 Operaciones con polinomios

Los polinomios se pueden sumar, retar multiplicar y dividir, mediante el uso de propiedades y leyes.

- Adición y Sustracción

  Para sumar o restar expresiones algebraicas se suprimen los signos de agrupación y se reducen los términos semejantes.

  Ejemplo 1:

  Efectuar las operaciones indicadas;

  $(3x^2 + 5xy - 3) - (8xy + 10) + (-6x^2 + 2)$

Solución:

Se suprimen los paréntesis:

$(3x^2 + 5xy – 3) – (8xy + 10) + (- 6 x^2 + 2)$

$= 3x^2 + 5xy – 3 - 8xy – 10 - 6 x^2 + 2$

$= 3 x^2 – 3xy – 11$

La adición o sustracción de expresiones algebraicas se pueden realizar en columnas, colocando uno debajo del otro los términos semejantes. Esta distribución es útil particularmente cuando hay que sumar o restar polinomios.

Ejemplo 2:

Sumar: $(3 a^2 b – a + 5b) + (- 8 b – 4 a^2 b) + (7 a^2 b – 9 a)$

Solución:

Se puede escribir:

$$
\begin{array}{rrr}
3 a^2 b & - a & + 5 b \\
– 4 a^2 b & & - 8 b \\
7 a^2 b & - 9 a & \\
\hline
6 a^2 b & - 10 a & - 3 b
\end{array}
$$

Ejemplo 3:

Reste $3x^2 – 5xy + 7y^2$ de $7x^2 – 2xy + 4y^2 + 6$

Solución:

$7x^2 – 2xy + 4y^2 + 6 - (3x^2 – 5xy + 7y^2)$

Después de suprimir los paréntesis, cada término que está dentro cambia de signo así:

$7x^2 – 2xy + 4y^2 + 6 - 3x^2 + 5xy - 7y^2$

$= 7x^2 - 3x^2 – 2xy + 5xy + 4y^2 - 7y^2 + 6$ Se agrupan términos semejantes.

$= (7 – 3) x^2 + (- 2 + 5) xy + (4 – 7) y^2 + 6$

$= 4 x^2 + 3 xy + (- 3) y^2 + 6$

$= 4 x^2 + 3 xy - 3 y^2 + 6$

- *Multiplicación*

Para realizar la multiplicación de dos o más expresiones algebraicas deben seguirse los siguientes pasos:

1 Producto de los signos:

(+) (+) = +

(-) (-) = +

(+) (-) = -

(-) (+) = -

3. Producto de los coeficientes: el coeficiente del producto se obtiene multiplicando el coeficiente de los factores.
4. Producto de las variables: se obtiene aplicando la ley de los exponentes.
5. Reducir los términos semejantes si los hay.

Ejemplo 1:

Realizar el siguiente producto:

$$\left(\frac{1}{5}a^3b^5\right)\left(-\frac{2}{3}a^2b^3\right)$$

Solución:

1. Productos de signos: (+) (-) = -
2. Producto de coeficientes: $\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{2}{15}\right)$
3. Producto de variables: $a^3 a^2 b^5 b^3 = a^{3+2} b^{5+3} = a^5 b^8$

Luego:

$$\left(\frac{1}{5}a^3b^5\right)\left(-\frac{2}{3}a^2b^3\right) = -\frac{2}{15} a^5 b^8$$

Ejemplo 2:

Resuelve: $6x^2y(-2xy^3 + \frac{1}{2}x^2y^2 - 5y)$

Solución:

$6x^2y(-2xy^3 + \frac{1}{2}x^2y^2 - 5y)$

$(6x^2y)(-2xy^3) + (6x^2y)(\frac{1}{2}x^2y^2) - (6x^2y)(5y)$

$-\quad 12x^3y^4 + 3x^4y^3 - 30x^2y^2$

En donde la suma se deja indicada, ya que no hay términos semejantes.

- *División*

La ley distributiva se aplica a la división. En forma general expresamos:

$$\boxed{\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}}$$

Esta propiedad es útil cuando dividimos una expresión algebraica entre un monomio.

Ejemplo 1

Divida la siguiente expresión $\dfrac{2x^2+4x}{2x}$

Solución:

$$\frac{2x^2+4x}{2x}$$
$$=\frac{2x^2}{2x}+\frac{4x}{2x}$$
$$= \mathrm{x} + 2$$

Ejemplo 2

Divida la siguiente expresión $\dfrac{25t^3+12t^2+15t-6}{3t}$

Solución:

$$\frac{25t^3+12t^2+15t-6}{3t}$$
$$=\frac{25t^3}{3t}+\frac{12t^2}{3t}+\frac{15t}{3t}-\frac{6}{3t}$$
$$=\frac{25}{3}t^2+4t+5-\frac{2}{t}$$

Ejemplo 3

Divida $23 - 11x^2 + 2x^3$ entre $2x - 3$

Solución:

Aquí $23 - 11x^2 + 2x^3$ es el dividendo y $2x - 3$ es el divisor. Antes de empezar la división, los términos en el dividendo y en el divisor deben ordenarse en orden descendente de las potencias de x y llenar con coeficientes cero las potencias faltantes. En consecuencia, el dividendo debe escribirse como: $2x^3 - 11x^2 + 0x + 23$.

$$\begin{array}{lrl}
 & & x^2 - 4x - 6 \quad \leftarrow \text{Cociente} \\
\text{Divisor} \rightarrow & 2x-3 \,\big) & 2x^3 - 11x^2 + 0x + 23 \quad \leftarrow \text{Dividendo} \\
 & & \underline{2x^3 - 3x^2} \\
 & & \quad - 8x^2 + 0x + 23 \\
 & & \quad \underline{- 8x^2 + 12x} \\
 & & \qquad\quad - 12x + 23 \\
 & & \qquad\quad \underline{- 12x + 18} \\
 & & \qquad\qquad\quad 5 \quad \leftarrow \text{residuo}
\end{array}$$

Los detalles de la división larga se acaban de mostrar y se explican de la manera siguiente: en primer lugar dividimos $2x^3$ (el primer término del dividendo) entre 2x (el primer término del divisor), obteniendo $\frac{2x^3}{2x} = x^2$. Esto nos da el primer término de cociente. Multiplicamos el divisor, 2x – 3, por el primer término del cociente, x^2, para obtener $2x^3$- $3x^{2.}$ Restamos esto al dividendo, obtenemos la diferencia - $8x^2$ + 0x + 23. Para obtener el siguiente término del cociente, dividimos el primer término de la diferencia – $8x^2$, entre 2x, el primer término del divisor. Esto da $\frac{-8x^2}{2x} = 4x$, el cual se convierte en el segundo término del cociente. Multiplicamos otra vez el divisor por este segundo término, - 4x, con lo que obtenemos – 8 x^2 + 12x; restamos esto a - $8x^2$ + 0x + 23 lo cual nos da la siguiente diferencia, - 12x + 23. Continuamos este procedimiento hasta que obtenemos una diferencia cuya máxima potencia sea menor que la correspondiente al divisor. Llamamos a esta última diferencia ***residuo***, La respuesta puede escribirse así:

$$\frac{2x^3 - 11x^{\to 2} + 23}{2x-3} = x^2 - 4x - 6 + \frac{5}{2x-3}$$

En general, tenemos:

$$\boxed{\frac{Dividendo}{Divisor} = Cociente + \frac{Residuo}{Divisor}}$$

4.2. Resolución de ecuaciones de primer grado con una sola variable

Una ecuación en una variable es una igualdad entre dos expresiones algebraicas. Estas expresiones son llamadas miembros o lados de la ecuación.

Ejemplo de Ecuaciones en una Variable:

a. $x+4=7$

b. $3(2-x)=4x-1$

Resolver una ecuación es encontrar los valores numéricos que al sustituirlo en lugar de las variables hacen cierta la igualdad. Para ello se deja sola la variable en un lado de la ecuación, esto se llama despejar la variable.

Ejemplos: Resolver **las siguientes ecuaciones:**

1. 4x - 8 = 0 **Solución** 4x = 8 x = $\frac{8}{4}$ x = 2	**Verificación:** Para x = 2 4(2) - 8 = 0 8 – 8 = 0 0 = 0
2. $3(2-x)=4x-1$ $6-3x=4x-1$ -3x -4x = -1 -6 -7x = - 7 x = $\frac{-7}{-7}$ x = 1	**Verificación:** Para x ¨= 1 $3(2-1)=4(1)-1$ $3(1)=4-1$ 3 = 3

4.3. Problemas de Aplicación

Para resolver problemas utilizando el álgebra, lo primero que debemos hacer es traducir el problema del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico.

Lenguaje común	**Lenguaje Algebraico**
La suma de 10 y x	10 + x
La mitad de un número	$\frac{a}{2}$
25 más que z	Z + 25
La diferenta de y menos 7	y – 7
El producto de dos números	ab
El cociente de dos números	$\frac{w}{z}$
El triple de c	3c
Un número más 6	n + 6
La resta de un número menos 3.5	x – 3.5

Pasos para plantear problemas de aplicación:

1. Lea el problema cuidadosamente, tal vez dos o tres veces. Identifique qué es lo que está buscando.
2. traduzca el problema del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico.
3. Liste los datos conocidos y escriba cualquier relación que exista entre ellos.
4. Resuelva la ecuación para la variable.

Ejemplo 1:

Una herencia de B/.900,000.00 se repartirá entre Katy, Miguel y Daniel de la siguiente manera: Miguel recibirá $\frac{3}{4}$ de lo que obtenga Katy, mientras que Daniel obtendrá la mitad de lo que reciba Katy. ¿ Cuánto recibirá cada uno?

Solución:

Datos: Katy: x

Miguel: $\frac{3}{4}x$

Daniel: $\frac{x}{2}$

Ecuación:

$$x+\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}x=900,000$$
$$\frac{4+3+1}{4}x=900,000$$
$$\frac{9}{4}x=900,000$$
$$9x=3,600,000$$
$$x=400,000$$

Evaluando la expresión algebraica

Katy: 400,000

Miguel: $\frac{3}{4}(400,00)=300,000$

Daniel: $\frac{400,000}{}2=200,000$

Ejemplo 2:

El perímetro de un rectángulo es de 60 pies. Encuentre su longitud y su anchura si la longitud es 8 pies mayor que la anchura.

Solución:

P =60 pies
l = x + 8
a = x

$P=2a+2l$ $60=2x+2(x+8)$ $60=2x+2x+16$ $4x+16-60=0$ $4x-44=0$ $4x=44$ $x=11$	La longitud es de: $l=x+8$ $l=11+8$ $l=19\,pies$ La anchura: a = x a = 11 pies

Ejemplo 3:

Miguel y Carlos convienen en dividir el costo de una pizza de B/.18.00 con base en la cantidad que comió cada uno. Si Carlos comió $2/3$ de la cantidad que comió Miguel, ¿Cuánto debe pagar cada uno?

Solución:

Miguel: x

Carlos $\frac{2}{3}x$

$$\frac{2}{3}x + x = 18$$
$$\frac{5}{3}x = 18$$
$$5x = 54$$
$$x = 10.80$$

Miguel debe pagar B/.10.80

Carlos debe pagar B/.7.20

4.4. Desigualdades

Se conocen como desigualdades los siguientes enunciados:

a < b se lee "a menor que b"

a > b se lee "a mayor que b"

a ≤ b se lee " a menor o igual que b"

a ≥ b se lee "a mayor o igual que b"

Propiedades de las desigualdades:

1. Transitiva: si a < b y b < c, entonces a < c.
2. Aditiva: si a < b y c < d, entonces a + c < b + d
3. Si a < b y k > 0, entonces ak < bk
4. Si a < b y k < 0, entonces ak > bk

Nota: al multiplicar o dividir por un número negativo se invierte el sentido de la desigualdad.

Se analizarán desigualdades lineales, cuadráticas y fraccionarias.

Resolver una desigualdad:

Es el proceso de encontrar el intervalo o intervalos de números reales que la satisfacen, es decir los valores que hacen cierta la desigualdad.

4.4.1. Desigualdades Lineales

4.4.1.1 Lineales con coeficientes enteros:

Son desigualdades en donde la variable tiene como exponente uno y el coeficiente es un número entero, éstas se resuelven de forma similar a las ecuaciones, teniendo en cuenta sus propiedades.

Ejemplo*: Determinar el conjunto de números reales que satisfacen la desigualdad*

$$5x - 20 - 4x < -3x - 40$$

Solución

$5x - 20 - 4x < -3x - 40$

$5x - 4x + 3x < -40 + 20$

$4x < -20$

$$x < \frac{-20}{4}$$

$x < -5$

respuesta: $\{x / x < -5\}$ ó $(-\infty, -5)$

Gráficamente

4.4.1.2 Lineales con coeficientes fraccionarios:

Son desigualdades en donde los coeficientes son fraccionarios, para resolverlas se halla el mínimo común denominador de las fracciones y se multiplica por todos los términos de la desigualdad, después se resuelve en forma similar a las desigualdades con coeficientes enteros.

Ejemplo

Resolver la desigualdad

$$\frac{5}{3}x - \frac{4}{5} \leq -\frac{3}{4}x - \frac{2}{3}$$

Solución

Como el m.c.d es 60

Multiplicando la desigualdad por 60, se obtiene

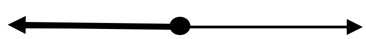
$$100x - 48 \leq -45x - 40$$

$$100x + 45x \leq -40 + 48$$

$$145x \leq 8$$

$$x \leq \frac{8}{145}$$

respuesta: $\left(-\infty, \frac{8}{145}\right]$ ó $\{ x/ \ x \leq \frac{8}{145} \}$

Gráficamente 

$\frac{8}{145}$

4.4.2. Desigualdades con Valor Absoluto

Si x es un número real y a es positivo, se verifica:

1. $|x| \leq a$ si y sólo si $-a \leq x \leq a$
2. $|x| \geq a$ si y sólo si $x \geq a$ ó $x \leq -a$

Ejemplo 1:

Resuelva la desigualdad $|x - 3| < 7$, representa el conjunto solución en la recta real y exprésalo en notación de intervalo.

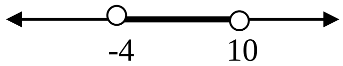
Solución

$|x - 3| < 7$

$-7 < x - 3 < 7$

$-4 < x < 10$

Respuesta



$(-4, 10)$

Ejemplo 2: Resuelva la desigualdad e ilustre el conjunto solución $|9x-3| \geq 1$

Solución

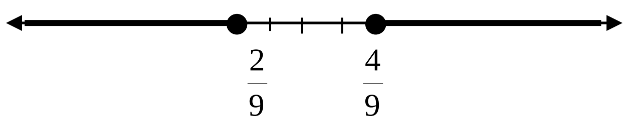
$|9x - 3| \geq 1$

$9x - 3 \geq 1$ ó $9x - 3 \leq -1$

$9x \geq 4$ $\quad$ $9x \leq 2$

$x \geq \frac{4}{9}$ $\quad$ $x \leq \frac{2}{9}$

Respuesta



PRÁCTICA

1) Evalué cada expresión para el valor dado de la variable

1) 3x+5 para x= 4 R= 17
2) – p para p = - 4 R= 4
3) $\frac{x-8}{2}$ para x= - 4 R= - 6
4) 2(p+9) para p = -12 R= - 6

2) Resuelva las siguientes ecuaciones

1) 7x – 6 R= x : 2
2) – 2x +3 =) 31 R= x : - 17
3) 60 = 3v – 5v R= v : - 30
4) -28 = - m + 2m R = m : - 28
5) x + x + 6 = 9 R = x : $\frac{3}{2}$
6) 7x = 3 x +8 R= x : 2
7) X – 14 = 2x R= x : -14
8) – 3 (2x – 3) = 9 R = x: 0
9) 2 (4y + 8) = 3 (2y – 2) R= y : -11
10) 16 - (x+3) = - 13 R = x : 26
11) 2x + 3 (x – 4) = 23 R= x: 7
12) 10x + 3(x – 7) = 18 R= x: 3

3) Reduzca las siguientes expresiones y resuelva

Ejercicios	**Respuestas**
1) $x^2 + (- 3x – x^{2} + 5)$	$5 – 3x$
2) $a^{2} + (- b^2 + 2 a^{2}) – (a^2 – b^{2})$	$2a^{2}$
3) $\left(\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{3}ab+\frac{1}{4}b^2\right)\left(\frac{2}{3}a-\frac{3}{2}b\right)$	$\frac{1}{3}a^3-\frac{35}{36}a^2b+\frac{2}{3}ab^2-\frac{3}{8}b^3$
4) $(a^{m} b^{x}) (- a^2) (- 2ab) (-3 a^{2} c)$	$- 6 a^{m+5} b^{x+1} c$
5) $\left(-\frac{2}{3}a^m\right)\left(\frac{3}{4}a^2b^4\right)\left(-3a^4b^{x+1}\right)$	$\frac{3}{2}a^{m+6}b^{x+5}$
6) $\frac{54x^2y^2z^3}{-6xy^2z^3}$	$- 9 x$
7) $\frac{x^{2m+1}y^{2m-1}+2x^{m-1}y^{m+1}}{x^{m-1}y^{2m-1}}$	$x^{m+2} + 2y^{-m+2}$
8) $\frac{6x^2y-8xy^2}{2xy}+\frac{x^3y^2+2x^2y^3}{x^2y^2}$	$4x – 2y$
9) $(x^3 + 2x^2 + x + 5)$ entre $(x + 2)$	$x^2 + 1 + \frac{3}{x+2}$
10) $(2x^3 - 3x^2 + 4x + 6)$ entre $(2x + 1)$	$x^2 - 2x + 3 + \frac{3}{2x+1}$

PROBLEMAS RESUELTOS

A. Resolver las siguientes desigualdades lineales con coeficientes enteros

1) Resolver: $x - 2 < -3x$

Solución

$x + 3x < 2$

$4x < 2$

$x < \frac{2}{4}$

$x < \frac{1}{2}$

2) Resolver: $x + 10 > 12$

Solución

$x > 12 - 10$

$x > 2$

3) Resolver: $2x < 12$

Solución

$2x < 12$

$x < \frac{12}{2}$

$x < 6$

4) Resolver $-17 \le 3x + 1 \le 10$

Solución

$-17 - 1 \le 3x \le 10 - 1$

$-18 \le 3x \le 9$

$-6 \le x \le 3$

5) Resolver: $20x - 15 \ge 35 - 5x$

Solución

$20x + 5x \ge 35 + 15$

$25x \ge 50$

$x \ge 2$

6) Resolver: $4x - 18 \le 10 - 10x$

Solución

$4x + 10x \le 18 + 10$

$14x \le 28$

$x \le 2$

7) Resolver: $4x + 8 \ge 10 + 2x$

Solución

$4x - 2x \ge 10 - 8$

$2x \ge 2$

$x \ge 1$

8) Resolver: $4 \le 20x - 3 \le 15$

Solución

$3 + 4 \le 20x \le 15 + 3$

$7 \le 20x \le 18$

$\frac{7}{20} \le x \le \frac{9}{10}$

9) Resolver: $18x - 4 > 10 - 10x$

Solución

$18x + 10x > 10 + 4$

$28x > 14$

$x > \frac{1}{2}$

10) Resolver: $-9x + 2x < -8x + 10$

Solución

11) Resolver: $9x + 8 \ge 18x - 28$

Solución

$-9x + 2x + 8x < 10$

$x < 10$

$9x - 18x \geq -28 - 8$

$-9x \geq -36$

$x \leq 4$

12) Resolver: $10x + 6 \leq 15x + 10$

solución

$10x - 15x \leq -6 + 10$

$-5x \leq 4$

$x \geq -\frac{4}{5}$

13) Resolver: $10 - 4x \geq 8 - 2x$

solución

$-4x + 2x \geq 8 - 10$

$-2x \geq -2$

$x \leq 1$

B- Resolver las siguientes desigualdades lineales con coeficientes fraccionarios.

14) Resolver $x + \frac{2}{3} > \frac{3}{2} + 2x$

Solución

$6x + 4 > 9 + 12x$

$6x - 12x > 9 - 4$

$-6x > 5$

$x < -\frac{5}{6}$

15) Resolver: $4 - \frac{2}{3}x \leq \frac{3}{2}x - \frac{1}{3}$

Solución

$24 - 4x \leq 9x - 2$

$-4x - 9x \leq -2 - 24$

$-13x \leq -26$

$x \geq 2$

16) Resolver: $4x - \frac{3}{5} \leq \frac{2}{3}$

Solución

$60x \leq 9 + 10$

$60x \leq 19$

$x \leq \frac{19}{60}$

17) Resolver: $\frac{2}{3}x + \frac{2}{5} < \frac{4}{5}$

Solución

$10x + 6 < 12$

$10x < 12 - 6$

$10x < 6$

$x < \frac{3}{5}$

18) Resolver: $4x - \frac{2}{3} \geq \frac{3}{2} - \frac{1}{3}x$

Solución

$24x - 4 \geq 9 - 2x$

$24x + 2x \geq 9 + 4$

$26x \geq 13$

$x \geq \frac{1}{2}$

C- Resolver las siguientes desigualdades con valor absoluto

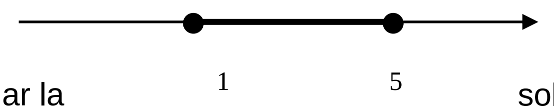
1) Hallar la solución de $|x-3| \leq 2$

Solución

$|x - 3| \leq 2$

$-2 \leq x - 3 \leq 2$

$1 \leq x \leq 5$



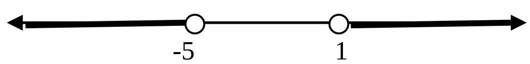
2) Hallar la solución de $|x + 2| > 3$

Solución

$x + 2 > 3$ ó $x + 2 < -3$

$x > 3 - 2$ $\quad$ $x < -3 - 2$

$x > 1$ $\quad$ $x < -5$



PRÀCTICA

Resuelva las siguientes desigualdades.

1) $4x < -8$ $\quad$ R = $x < -2$

2) $2x - 5 < x$ $\quad$ R = $x < 5$

3) $4x - 7 \geq 2x + 5$ $\quad$ R= $x \geq 6$

4) $\frac{2}{3}x - 4 < \frac{1}{3}x + 2$ $\quad$ R= $x < 6$

5) $\frac{x-2}{3} \geq \frac{3}{8}$ $\quad$ R = $x \leq 3\frac{1}{2}$

6) $|2x - 1| < 7$ $\quad$ R = $-3 < x < 4$

7) $|x + 4| > 6$ R = x < - 10 o x > 2

MÓDULO 5

ALGUNOS ASPECTOS SOBRE ESTADÍSTICA

OBJETIVOS

Al finalizar este capitulo el estudiante será capaz de

- Recopilar, organizar, analizar y graficar la información para su posterior interpretación
- Conocer las medidas de tendencia central
- Resolver problemas utilizando las medidas de tendencia central

5. ALGUNOS ASPECTOS DE ESTADÍSTICA

5.1. Definición:

La estadística es la ciencia que recopila, organiza, presenta, analiza e interpreta datos.

5.2. Conceptos fundamentales

5.2.1 Población

En estadística se denomina población o universo al conjunto de elementos cuyas propiedades nos interesa analizar o estudiar.

Ejemplo: Los aspirantes a ingresar a la Universidad Tecnológica de Panamá para el año 2010.

Ejemplo: El conjunto de todos los votantes de la República de Panamá.

5.2.2. Muestra

Debido a que en ocasiones es difícil o poco práctico estudiar la totalidad del grupo, se hace necesario escoger sólo una parte de él, pero mediante normas apropiadas que dependen del conjunto que se ha de estudiar. Este subconjunto que se extrae de la población es lo que se denomina muestra. Es decir, la muestra es una parte de la población.

Si una muestra es representativa de una población se pueden deducir importantes conclusiones acerca de esta población.

Ejemplo: 200 aspirantes a ingresar a la Universidad Tecnológica de Panamá para el año 2010.

Ejemplo: Un porcentaje de la población de votantes de cada una de las provincias de la República de Panamá.

5.2.3. Variables

Cada uno de los elementos de una población o de una muestra posee características o aspectos susceptibles de ser estudiadas. A esta característica, aspecto o dato extraído de la observación es lo que se denomina variable estadística. Este nombre se debe a que varía de elemento a elemento, cada elemento tiene un valor para cada variable, y por lo tanto adopta diferentes valores que pueden ser representados en la escala de números reales.

Ejemplo: Existen diversas variables estadísticas, entre ellas: edad, estatura, idioma, sexo, peso, ingreso económico, calificaciones de una asignatura, y muchas otras que representan medidas u observaciones que comprenden un carácter común a todos los miembros de una población.

Las variables se clasifican en distintos tipos, entre estos, las variables cualitativas que no se pueden medir, pero se expresan mediante palabras, y las variables cuantitativas, que son aquellas que se pueden medir, y se expresan mediante números. Las variables cuantitativas pueden ser variables discretas o continuas.

5.2.3.1. Variables discretas

Las variables discretas son aquellas que no tienen la posibilidad de fraccionamiento, es decir el número de valores es un número entero. En otras palabras, son el resultado de contar. Por ejemplo, personas en el hogar, países de un continente, casas en una ciudad, y otras.

5.2.3.2. Variables continuas

Las variables continuas son aquellas que producen mediciones que pueden ser fraccionadas dependiendo de la precisión del instrumento, es decir, el número de valores es un número con infinitos decimales. En otras palabras, son el resultado de medir. Por ejemplo, estatura, peso, temperatura y otras.

5.3. Distribución de Frecuencias.

En el transcurso de la recopilación de datos, en ocasiones, éstos son muy numerosos, y resulta complejo interpretar los resultados obtenidos. Para minimizar esta dificultad se hace necesario realizar un arreglo tabular de los datos y sus frecuencias correspondientes. Se denomina frecuencia a la cantidad de veces que aparece un dato. A este arreglo tabular es lo que se llama distribución de frecuencias.

Ejemplo

La siguiente tabla resume las edades de un grupo de 60 estudiantes que ingresaron por primera vez a la Universidad Tecnológica de Panamá.
Período 2004

Tabla de distribución de frecuencia Nº1.

Edades	**Frecuencia**
16	3
17	5
18	15
19	10
20	8
21	6
22	5
23	4
25	4
Total	**60**

En esta tabla de distribución de frecuencia se observa que por ejemplo, hay 3 estudiantes con edad de 16 años, 5 estudiantes con edad de 17 años, y así sucesivamente.

5.4. Medidas de tendencia central

Hay dos características en lo datos extraídos de una investigación que se representan con marcada regularidad: una de ellas es que los datos suelen acumularse alrededor de un valor central situado entre ambos extremos de la variable estudiada; y otra es que los datos pueden tender a dispersarse y distribuirse alrededor de un valor central. Estas características han generado métodos cuantitativos para su estudio. La primera de estas características responde al estudio de medidas de tendencia central como lo son la media, la mediana y la moda, medidas que corresponde estudiar en esta oportunidad.

5.4.1 Moda o Modo

La moda de una variable es el valor o la categoría con la más alta frecuencia en los datos. Es utilizada principalmente con datos cualitativos, pero también se le puede emplear con datos cuantitativos. En ocasiones a la moda también se le llama modo.

Puede haber un conjunto de datos donde no hay moda. También puede haber más de una moda, es decir conjuntos para los que hay 2,3 ó más valores con la frecuencia más alta, a este conjunto de datos se le denomina bimodales, trimodales, y así sucesivamente.

La moda es una medida apropiada siempre que se desee una estimación aproximada, y rápida de la tendencia central, o cuando únicamente interesa el caso típico. En adelante la moda se denotará por Mo.

***Ejemplo*:**

En la tabla de distribución de frecuencias # 1, sobre las edades de un grupo de 60 estudiantes que ingresaron por primera vez a la U.T.P. Período 2004, la moda es 18 años, pues fue el dato con más alta frecuencia. Es decir, la tendencia o el caso típico de edad es 18 años.

5.4.2. Media Aritmética o Promedio

La media aritmética de una variable, conocida comúnmente como promedio, es la suma de las observaciones hechas para esa variable, dividida entre el número total de observaciones.

La media aritmética es la medida preferida para representar la tendencia central, pues es bastante estable, y generalmente proporciona una mejor estimación del parámetro correspondiente de la población. Sin embargo, la media se puede ver afectada por valores extremos que sean puntajes muy altos o muy bajos, pero es aconsejable utilizarla cuando se quiere hacer notar el peso de los puntajes. La media se denota con $\bar{x}$

Ejemplo:

Para la tabla de distribución de frecuencias # 1 la media aritmética se obtiene de la siguiente manera:

$$\bar{x} = \frac{16(3)+17(5)+18(15)+19(10)+20(8)+21(6)+22(5)+23(4)+25(1)}{60} = \frac{1191}{60} = 19.8$$

Esta media indica que en promedio la edad de los ingresantes a la U.T.P período 2004 es de 18.4 años, es decir es la edad que los representa a todos.

Ejemplo:

En cierta empresa se investigó los sueldos de 10 empleados y resultaron los siguientes datos: B/ 350.00; B/ 375.00; B/ 300. 00; B/ 325.00; B/ 350.00; B/ 275.00; B/ 390.00; B/ 370.00; B/ 250.00; B/ 275.00. Halle la media de los sueldos.

Solución:

Como hay 10 empleados, se necesita buscar el sueldo que los represente a todos.

$$\bar{x} = \frac{350+375+300+325+350+275+390+370+250+275}{10} = \frac{3260}{10} = 326$$

La media $\bar{x}$ = 326 indica que en promedio los empleados de la empresa reciben un sueldo de B/ 326.00, o sea que B/ 326.00 representa el sueldo de todos.

Ejemplo: Las estaturas de las personas que conforman dos grupos A y B son las siguientes: *Grupo A*: 1.40 m ; 1.60m ; 1.54m ; 1.58m

Grupo B: 1.34m; 1.50m; 1.49m; 1.65m; 1.53m

¿Cuál de los dos grupos tiene estatura más alta?

Solución:

Se observa que es distinto el número de personas en cada grupo, por lo tanto hallar la media en ambos, sería lo adecuado para hacer la comparación:

Media del grupo A $\bar{x} = \dfrac{1.40+1.60+1.54+1.58}{4} = \dfrac{6.12}{4} = 1.53\text{m}$

Media del grupo B $\bar{x} = \dfrac{1.34+1.50+1.49+1365+1.53}{5} = \dfrac{7.51}{5} = 1.50\text{m}$

Por tanto, en promedio, el grupo con estatura más alta es el grupo A.

5.4.3. Mediana

La mediana de un conjunto de datos es el valor que ocupa la posición central cuando los datos se ordenan de menor a mayor. Cuando el número de datos es impar, la mediana coincide con uno de estos datos, pero sí el número de valores es par se tiene dos valores centrales, y en este caso se toma como mediana el promedio de los dos.

La mediana en una distribución de frecuencia es el valor que divide a ésta en dos partes iguales, es decir es la puntuación por encima de la cual se encuentra la mitad de las demás puntuaciones (el 50%), y por debajo, la otra mitad (el 50%).
La mediana es aconsejable utilizarla cuando en la distribución existen valores muy extremos que afectan la media. Se simboliza por M ó Me.
En general para descubrir el caso o puntuación que constituye la mediana de una distribución se aplica la fórmula $\dfrac{N+1}{2}$. Por ejemplo si se tiene 11 casos, $\dfrac{11+1}{2} = 6$ entonces se busca el valor en la posición seis (6), y éste será la

mediana, es decir el número que corresponde a la mediana ocupa la posición seis (6).

***Ejemplo*: ** Los siguientes datos representan el peso en gramos de un mineral, tomando varias muestras del mismo. 14.9, 17.8, 18, 18.5 , 19, 19.2, 20, 21.8, 22

Se observa que $\frac{N+1}{2}=\frac{9+1}{2}=\frac{10}{2}=5$, es decir la mediana se encuentra en la quinta posición , Me = 19, es decir 19 gr es la mediana.

Por otro lado, como se trata sólo de 9 datos, fácilmente se observa la posición central

14.9, 17.8, 18 ,18.5, $\boxed{19}$, 19.2, 20, 21.8, 22

Esto significa que el 50% de las muestras del mineral pesan menos de 19 gr y el otro 50% pesa más de 19 gr.

Ejemplo:

Las edades de seis hermanos son 8, 12, 4 ,17,10 y 15 años. En primer lugar se colocan los datos en orden creciente, así se tiene 4, 8, 10, 12, 15, 17 se observa que $\frac{N+1}{2}=\frac{6+1}{2}=3.5$

Es decir que la mediana se encuentra entre la tercera y cuarta posición, por lo que se debe buscar un promedio de ellas así: Me = $\frac{10+12}{2}=11$

La mediana es 11 años, o sea que la mitad de los hermanos tienen menos de 11 años y la otra mitad tiene más de 11 años.

Se observa también 4, 8, $\boxed{10,}$ $\boxed{12,}$ 15, 17

Valores centrales

PRÁCTICA

1. Indica que **variables** son **cualitativas** y cuales **cuantitativas**:

   1 Comida Favorita.

   2 Profesión que te gusta.

   3 Número de goles marcados por tu equipo favorito en la última temporada.

   4 Número de alumnos de tu Instituto.

   5 El color de los ojos de tus compañeros de clase.

   6 Coeficiente intelectual de tus compañeros de clase.

2. Calcular la media, la mediana y la moda de la siguiente serie de números: 5, 3, 6, 5, 4, 5, 2, 8, 6, 5, 4, 8, 3, 4, 5, 4, 8, 2, 5, 4.

3. Las diez personas que trabajan en una cafetería tienen las siguientes edades en años: 16, 20, 20, 20, 24, 30, 40, 40, 50, 50 Calcula la edad media y la moda de las personas que trabajan en esa cafetería.

4. En la clase de inglés se ha medido la altura (talla) de los 25 alumnos; la medida en centímetros es: 150, 151, 153, 156, 157, 158, 158, 158, 159, 159, 160, 163, 163, 164, 164, 164, 165, 167, 168, 169, 170, 172, 173, 174 175. Calcula la altura promedio, la mediana y la moda de las estaturas de los 25 alumnos.

5. Si Gerardo ha tenido las siguientes calificaciones en el semestre: 80, 85, 50, 75, 60. Cuál es su promedio y la mediana de sus calificaciones.

RESPUESTAS

2. Mo = **5,** Me = **5**, $\bar{x} = 4.8$**,** **3.** 31 y 20, **4.** 162.8, 163 y 164, **5.** 72 y 50

BIBLIOGRAFÍA

OTEYZA, Elena LAM, Enma HERNÁNDEZ, Carlos CARRILLO, Angel	Álgebra Tercera edición. 2007. Editorial Pearson Education
LAJÓN, Diana	Matemática para el Comercio. Primera edición.
PONCE, Rosa RIVERA, Humberto	Aritmética y Pre-Algebra. Tercera edición. Mc Graw Hill.
KRAMER, Arthur	Fundamentos de Matemáticas. Un enfoque para Técnicos. Mc Graw Hill.