UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ

GUÍA AUTO FORMATIVA SOBRE

LÍMITE DE FUNCIONES

"CÓMO PREDECIR EL COMPORTAMIENTO DE FUNCIONES SOBRE INTERVALOS PEQUEÑOS".

Profesora Marilú Rivera

- 2015 -

CONTENIDO
LÍMITE DE FUNCIONES

"CÓMO PREDECIR EL COMPORTAMIENTO DE FUNCIONES SOBRE INTERVALOS PEQUEÑOS".

INTRODUCCIÓN

Esta guía didáctica está desarrollada para estudiantes universitarios que cursan la materia de matemática II de la Universidad Tecnológica de Panamá.

El objetivo fundamental es la de ofrecer a los educandos la facilitad de comprensión y desarrollo de los conceptos y definición del tema de límite de una manera constructivista.

En la primera parte se estudian los límites de una función partiendo de una idea intuitiva que nos conduce a su definición formal. Contiene además las "Proposiciones de los límites de funciones", ayudando a que el estudiante calcule el límite de las diferentes funciones, tema que se estudió en el módulo anterior de titulado: **Funciones y sus Gráficas.** Se presentan además al concluir cada tema prácticas propuestas para que el estudiante adquiera las destrezas necesarias en el desarrollo del mismo. Al final de la guía se presenta una serie de problemas resueltos que ayudarán al educando a reforzar todo el contenido.

El concepto de límite es uno de los más importantes en el análisis matemático y el de mayor dificultad para el estudiante. Es por este motivo, que se dedica una guía didáctica a estudiar este importante concepto.

LÍMITE DE FUNCIONES

Resumen

La presente Guía de Autoformación tiene la finalidad de introducir al estudiante, primeramente en una problemática ligada a los obstáculos cognitivos que se presentan en la construcción del concepto de límite y en segundo lugar, presentar un grupo de actividades para promover una mejor aproximación al aprendizaje de este tema. Como se podrá observar a lo largo de esta Guía, existe una gran cantidad de ejercicios que nos sitúa en una problemática muy amplia cuya solución implica un análisis de las dificultades cognitivas y propuestas de enseñanza bien pensadas y experimentadas a lo largo de nuestra trayectoria como docentes en el área de las ciencias exactas de la Universidad Tecnológica de Panamá.

Propósito

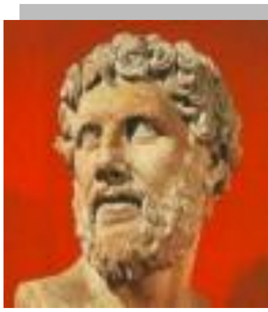
Ofrecer a los estudiantes de primer año de la carrera de Técnico en Ingeniería con especialización en Tecnología Industrial y a los Técnicos en Administración de la Facultad de Ingeniería Industrial de la Universidad Tecnológica de Panamá, las informaciones pertinentes y las herramientas necesarias que les permita calcular el límite de las funciones y su aplicación a casos de la vida diaria.

Objetivo General

Ofrecer a los educandos la facilitad de comprensión y desarrollo de los conceptos y definición de límite de una manera constructivista.

CONEXIÓN CON LA HISTORIA

Demócrito



Leibniz

Wallis

En la construcción de las teorías matemáticas en la Grecia Antigua, muy temprano surgió una clase específica de problemas para la solución de los cuales, era necesario investigar los pasos al límite, los procesos infinitos, y la continuidad.

Algunos grupos de científicos antiguos buscan la salida de estas dificultades en la aplicación a la matemática de las ideas filosóficas atomicistas. El ejemplo más notable lo constituye Demócrito. Igualmente florecieron teorías totalmente contrarias a esta concepción. Tengamos en cuenta, por ejemplo, las paradojas de Zenón. Otro de los métodos más antiguos de este género es el método de exhaución, atribuido a Euxodo y aplicable al cálculo de áreas de figuras, volúmenes de cuerpos, longitud de curvas.

Con el método se demuestra la unicidad del límite, pero no se soluciona el problema sobre la existencia de límite; aun así se considera la primera forma del método de límites.

Wallis Matemático inglés. Estudió medicina y filosofía en Cambridge, siendo ordenado sacerdote en 1640. Fundador de la Royal Society de Londres. Su mérito más trascendental reside en haber establecido claramente las primeras definiciones de límite y en ella se utiliza por primera vez el símbolo infinito. Con posterioridad perfeccionó la definición de límite. Fue Ausgustin Cauchy (1789-1857) quien dio la definición de límite que utilizamos hoy en día.

Gran parte de la obra de Wallis en Cálculo precedió a Newton y Leibniz, sobre quienes ejerció una notable influencia.

Su obra "*Arithmetica Infinitorum*" (1655) lo llevó a la fama. A lo largo de sus páginas abordaba cuestiones tales como las series, la teoría de los números, las cónicas, los infinitos... A Wallis se atribuye la introducción del símbolo ∞, utilizado habitualmente para denotar el infinito.

INTRODUCCIÓN AL TEMA DE LÍMITES

Límite: Que no se puede sobrepasar, fin de una extensión. (Tomado de un diccionario de la Real Academia).

Entre los primeros recuerdos sobre el concepto de límite figura el uso que le damos en algunos casos: el límite del mar, hacemos referencia a esta frase cuando miramos el horizonte. La mesa tiene un límite, no es ilimitada. En algunos casos cuando nos ordenamos de acuerdo a un número elegido por nosotros para participar en una competencia, hay uno que es el ganador.

¿Puedes tu contar el número de granos de arena de una playa, o el de estrellas que vemos en el cielo?. En realidad, semejante cifra no está más cerca del infinito que otra más modesta como 2, 15, ó 3,089. ¿Y entonces?. Para encontrarnos con conjuntos que ningún número pueda contar, debemos recurrir al mundo de las matemáticas.

El gran matemático David Hilbert ponía como ejemplo un hotel de infinitas habitaciones y un viajero que llega durante una noche de tormenta y ve en la puerta el cartel que dice “completo”. En un hotel finito, esta palabra sería terrible y nuestro viajero se sentiría desesperado. El hotel de Hilbert queda a cientos de kilómetros, pero en este caso nuestro viajero pide tranquilamente un cuarto. El conserje ni siquiera se sorprende, levanta el teléfono y da una orden general: que el ocupante de la habitación uno se mude a la habitación dos, el de la habitación dos a la tres, el de la tres a la cuatro y así sucesivamente. Mediante esta sencilla operación, la habitación uno queda vacía, lista para el nuevo huésped; todos los ocupantes del hotel tienen una habitación y el hotel seguirá como antes, completo. Ahora supongamos que en vez de llegar un solo viajero, llegaran infinitos, otra vez se tendría que acomodar a la multitud recién llegada. El particular comportamiento del hotel de Hilbert es apenas una pequeña anomalía que se presenta al operar con el infinito.

El lenguaje humano tiene la característica de ser abierto, de esta forma se puede utilizar los conceptos de manera poco precisa y aún así estructurar un argumento de manera que la idea central se comprenda, esto es, no se da una definición precisa de los conceptos utilizados lo que hace que cada persona haga su propia lectura del texto con base a su experiencia previa y a su cultura. En este contexto, el infinito hace referencia a la idea o noción de "*inconmensurablemente grande"*.

Una anécdota que se dio en la escuela de matemáticas de una Universidad, ilustra la forma en que se concibe el infinito de manera intuitiva: Sucedió durante una clase de Cálculo Diferencial e Integral. Cuando el profesor estaba desarrollando la teoría de límites al infinito y límites infinitos, un estudiante le preguntó ¿Qué es el infinito?, el profesor le indicó: "el infinito es algo como esto…"Seguidamente tomó la tiza y comenzó a trazar una línea alrededor del aula dando tres vueltas, luego sin dejar de trazar la línea, abrió la puerta y se fue… los estudiantes se quedaron esperando pero el profesor no regresó. Cuando salieron vieron como la línea que el profesor trazó recorría las paredes, bajaba por las gradas y salía del edificio….A la clase siguiente, mientras los estudiantes esperaban la llegada del profesor, éste se presentó trazando aún la línea con una tiza hasta llegar de nuevo a la pizarra y le dijo a los estudiantes: “ Bueno, esto no es el infinito, pero al menos ya tienen una idea de lo que es”…

Se ve que aunque el profesor trató de dar un ejemplo bastante ilustrativo del infinito, siempre quedó limitado en un ejemplo finito pero “muy grande”.

La noción de límite es una idea importante que distingue al cálculo de otras ramas de las matemáticas. De hecho podríamos definir cálculo como el estudio de los límites, por lo que una de las metas valiosas es la comprensión de este concepto.

El cálculo tiene que ver directamente con los procesos infinitos, y la teoría de límite es una de las primeras en donde el concepto de infinito aparece, los conflictos de aprendizaje se hacen presentes de inmediato.

Aún y cuando la experiencia diaria nos limita a procesos finitos, la mente humana ha tenido la capacidad de imaginar aspectos ilimitados. Precisamente considerando el hecho de que nuestra construcción del infinito la realizamos a través de la experiencia, es natural o comprensible que nuestra idea de infinito consista en la idea de realización paso a paso sin límites; fundamentalmente esta idea está arraigada a lo que se denota en matemáticas como el infinito potencial. Así, parece natural, que nuestra primera construcción tiene que ver con un proceso paso a paso que no se termina.

1. UNA NOCIÓN INTUITIVA

Considere la función definida por:

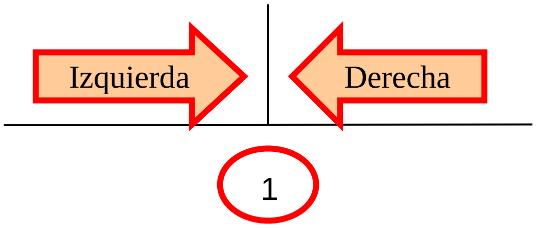
$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$$

$$f(x) = \frac{2(1)^2 + 1 - 3}{1 - 1} = \frac{3 - 3}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

Observe que no está definida para x = 1 ya que en este punto $f(x)$ tiene la forma $\frac{0}{0}$ que carece de significado. Sin embargo, aún podemos preguntarnos qué está sucediendo a $f(x)$ cuando se aproxima a 1. Con más precisión, cuándo x se aproxima a 1, ¿ $f(x)$ se está aproximando a algún número específico?. Para obtener la respuesta podemos hacer dos cosas:

1. Calcular algunos valores de *f(x)* para valores cercanos a 1.

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$$



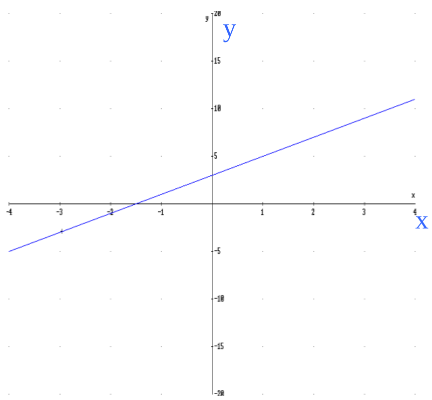


Figura 1

Reforzando tus conocimientos

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$$

$$f(1.1) = \frac{2(1.1)^2 + 1.1 - 3}{1.1 - 1}$$
= 5.2

$$f(1.01) = \frac{2(1.01)^2 + 1.01 - 3}{1.01 - 1}$$
= 5.02

$$f(0.9) = \frac{2(0.9)^2 + 0.9 - 3}{0.9 - 1}$$
= 4.8

$$f(0.99) = \frac{2(0.99)^2 + 0.99 - 3}{0.99 - 1}$$
= 4.98

2. Bosquejar la gráfica de la función. Todo esto se ha hecho y los resultados se muestran a continuación en la figura 1.

Por la derecha

x	y
1.1	5.2
1.01	5.02
1.001	5.002
1.0001	5.0002
1.00001	5.00002
↓	↓
1	5

Por la izquierda

x	y
0.9	4.8
0.99	4.98
0.999	4.998
0.9999	4.9998
0.99999	4.99998
↓	↓
1	5

Toda la información que hemos reunido parece apuntar a la misma conclusión *f(x)* se aproxima a 5 cuando x se aproxima a 1. En símbolos matemáticos escribimos:

$$\boxed{\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1} = 5}$$

Esto se lee *"el límite cuando x tiende a 1 de* $\frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$ *es 5".*

Siendo buenos en álgebra y conociendo como se factoriza un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, podemos probar más y presentar mejor evidencia.

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(2x + 3)(x - 1)}{x - 1}$$
$$= \lim_{x \to 1} (2x + 3) = 2(1) + 3 = 5$$

Observe que $\frac{(x-1)}{(x-1)}=1$ siempre que $x \neq 1$. Esto justifica el procedimiento; una justificación rigurosa vendrá posteriormente cuando se estudien los límites indeterminados.

Para asegurarnos que estamos en el camino correcto, necesitamos tener una clara comprensión del significado de la palabra límite. A continuación está nuestro primer intento de una definición.

DEFINICIÓN: ***Significado intuitivo de límite***

Decir que $\lim_{x \to c} f(x) = L$ significa que cuando x está cerca, pero diferente de c, entonces $f(x)$ está cerca de *L*

Obsérvese que no se pide nada en c, incluso la función no necesita estar definida en c, no lo estaba en el ejemplo anterior. La noción de límite está asociada con el comportamiento de una función cerca de *c*, pero no en *c*,

El (la) estudiante es seguro que objetará nuestro uso de la palabra cerca. ¿Qué significa cerca?. ¿Qué tan cerca es cerca?. Para precisar respuestas seguiremos con algunos ejemplos más que le ayudarán a aclarar la idea.

MÁS EJEMPLOS

EJEMPLO 1 Determine $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3}$

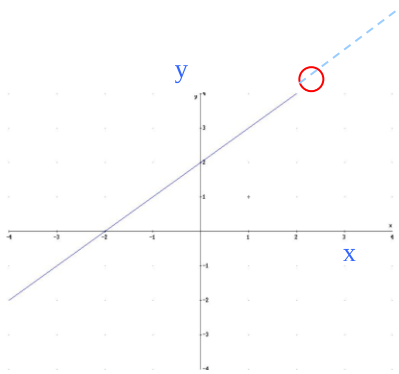


Figura 2

Gráfica de la función

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$$

Solución: Observe que $\dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3}$ no está definida en x = 3, pero todo está bien. Para tener idea de qué está pasando cuando x se aproxima a 3, podríamos utilizar una calculadora para evaluar la expresión dada, por ejemplo, en 3.1, 3.01, 3.001, etc. Pero es mucho mejor utilizar un poco de álgebra para simplificar el problema.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)\,(x+2)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \ (x+2) = 3 + 2 = 5$$

La cancelación de x – 3 en el segundo paso es válida ya que la definición de límite ignora el comportamiento en x = 3. Recuerde, $\dfrac{(x-3)}{(x-3)} = 1$ siempre que x no sea igual a 3.

EJEMPLO 2 Determine $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{\sqrt{x - 1}}$

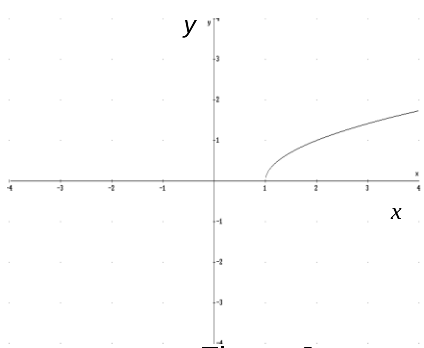


Figura 3

Gráfica de la función

$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$$

Solución:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \to 1} \ (\sqrt{x} + 1) = \sqrt{1} + 1 = 2$$

EJEMPLO 3 Determine $\lim_{x \to -5} \frac{x^2 - 25}{x + 5}$

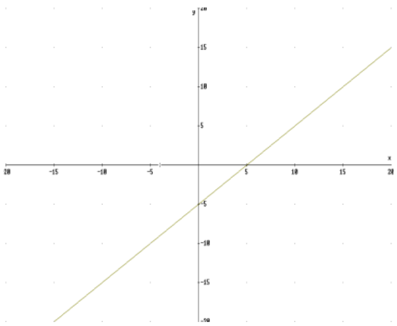


Figura 4

Gráfica de la función

$f(x) = \frac{x^2 - 25}{x + 5}$

Solución:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x \to -5} \frac{x^2 - 25}{x + 5} \\
&= \lim_{x \to -5} \frac{(x-5)(x+5)}{x+5} \\
&= \lim_{x \to -5} (x-5) \\
&= -5 - 5 \\
&= -10
\end{aligned}
$$

EJEMPLO 4 Determine $\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2}$

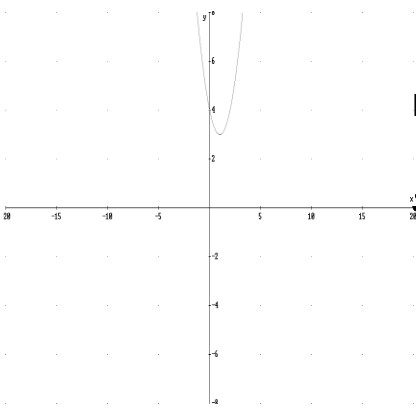


Figura 5

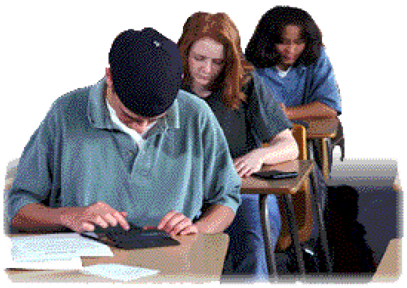
Gráfica de la función

$f(x) = \frac{x^3 + 8}{x + 2}$

Solución:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2} \\
&= \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}{x+2} \\
&= \lim_{x \to -2} (x^2 - 2x + 4) \\
&= (-2)^2 - 2(-2) + 4 \\
&= 4 + 4 + 4 \\
&= 12
\end{aligned}
$$

EJEMPLO 5 Determine $\lim_{x\to 0} \frac{sen\ x}{x}$



Solución:

En este caso no podemos simplificar la x. Una calculadora nos ayudará a tener idea del límite. Utilice su calculadora en modo de radianes, para verificar los valores de la tabla de la figura 7. La figura 6 muestra la gráfica de la función estudiada.

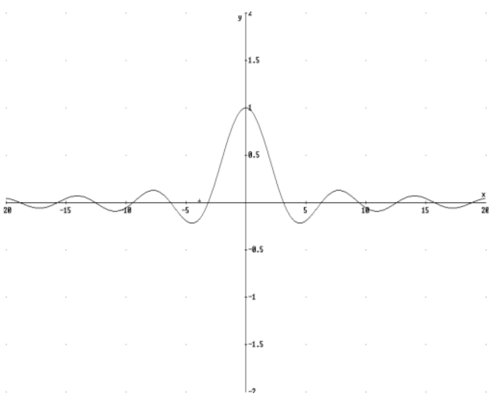


Figura 6

Grafica de la función

Por la derecha

X	y
1.0	0.84147
0.5	0.95885
0.1	0.99833
0.01	0.99998
0.001	0.99999
↓	↓
0	1

Por la izquierda

x	y
-1.0	0.84147
-0.5	0.95885
-0.1	0.99833
-0.01	0.99998
-0001	0.99999
↓	↓
0	1

Figura 7

Reforzando tus conocimientos

$$f(x) = \frac{sen\,x}{x}$$

$$f(1.0) = \frac{sen\,(1.0)}{1.0}$$

= 0.84147

$$f(0.5) = \frac{sen\,(0.5)}{0.5}$$

= 0.95885

$$f(-1.0) = \frac{sen\,(-1.0)}{-1.0}$$

= 0.84147

Nuestra conclusión al observar las tablas de la figura 7 ya sea aproximándonos por la derecha o por la izquierda la función se acerca al número 1, matemáticamente esto lo representamos de la siguiente manera:

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen\ x}{x} = 1$$

EJEMPLO 6

Aplicación

Se ha medido el consumo de oxígeno C(x) de un corredor, como una función de su velocidad x, Los resultados se muestran en la gráfica de la figura 8. En primer lugar se harán algunas predicciones mediante el examen de la gráfica de C(x).

a) En la figura 8 se concentra la atención en la parte de la gráfica cercana a la velocidad máxima del corredor. A medida que la velocidad x aumenta aproximándose a 20 kilómetros por hora (flecha de color sobre el eje x), se pronostica que el consumo de oxígeno se aproxima a 17 unidades (flecha de color sobre el eje y). Puesto que el corredor no puede alcanzar una velocidad de 20 kilómetros por hora, solo puede estar cerca de x = 20 “desde la izquierda” (corriendo cada vez más rápido).

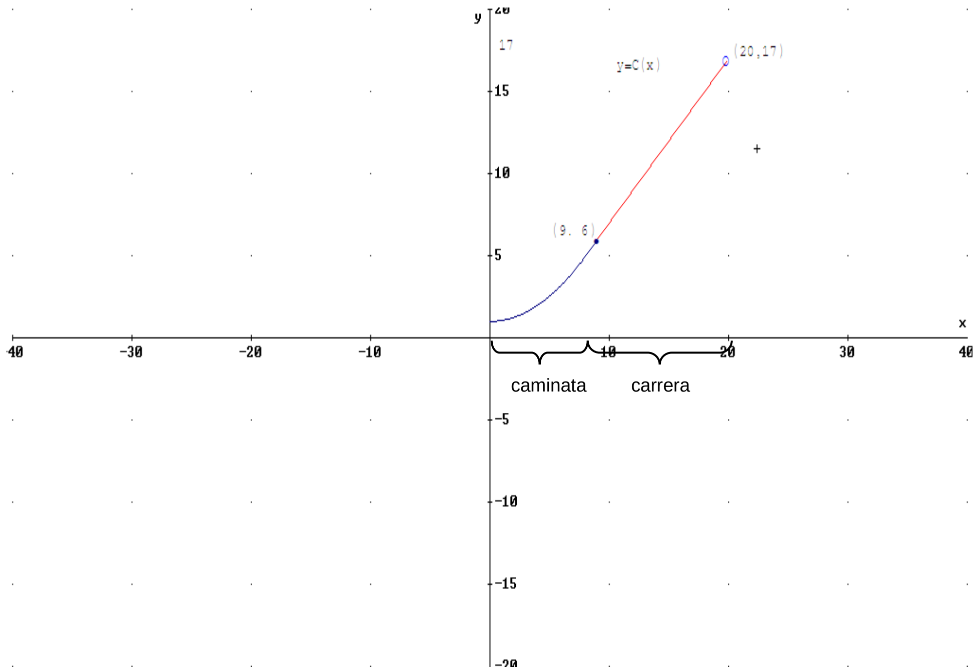
En notación matemática se escribe:

$$\lim_{x \to 20^-} C(x) = 17 \text{ o bien, } \quad C(x) \to 17 \text{ cuando } x \to 20^-$$

lo cual se lee “ el límite de consumo de oxígeno C(x) es 17 conforme la velocidad de carrera x tiende a 20 desde la izquierda” o bien, “ C (X) tiende a 17 conforme x tiende a 20 desde la izquierda.”

$$y = C(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{81}x^2 + 1; & 0 \le x \le 9 \\ x - 3; & 9 \le x \le 20 \end{cases}$$

Gráfica de consumo de oxígeno C(x) de un corredor, como una función de su velocidad x



$$y = C(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{81}x^2 + 1; & 0 \leq x \leq 9 \\ x - 3; & 9 \leq x \leq 20 \end{cases}$$

2. ESTUDIO FORMAL DE LÍMITE

Dimos una definición informal en el punto anterior. A continuación se presenta la siguiente definición formal:

Definición de límite de una función

Sea *f* una función definida en cada número de algún intervalo abierto que contiene a "a", excepto posiblemente el número a mismo. El **límite de *f(x)* conforme x se aproxima a "a" es L,** lo que se escribe como:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Si el valor absoluto de la diferencia entre la función y el límite llega a ser tan pequeño, como se quiera para todo valor de x suficientemente próximo al valor de a.

¿Dos límites distintos?

Una pregunta natural es "¿Una función puede tener dos límites distintos?" La obvia respuesta intuitiva es *no*. Si una función se aproxima cada vez más a L, cuando $x \to a$ (por la derecha y por la izquierda), no puede acercarse también cada vez a un número distinto M, ya que de ser así concluiríamos que el límite para esta función "no existe" este análisis se verá posteriormente en los límites unilaterales

A fin de calcular límites de manera más fácil que cuando se utiliza la definición se emplean proposiciones cuyas demostraciones se basan en las definiciones que se muestran a continuación.

2.1 PROPOSICIONES QUE SIRVEN PARA EL CÁLCULO DE LÍMITES.

Sean *f(x)* y *g(x)* dos funciones tales que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$, además sea *c* una constante cualquiera, entonces:

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 1} -3 = -3$$

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 1} 3x = 3\lim_{x\to 1} x = 3(1) = 3$$

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 5} (x+5) = \lim_{x\to 5} x + \lim_{x\to 5} 5$$
$$= 5 + 5 = 10$$

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 2} 5x^3 = \lim_{x\to 2} 5 \bullet \lim_{x\to 2} x^3$$
$$= 5(2)^3 = 5(8)$$
$$= 40$$

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 2} \frac{4x+7}{2x+1}$$
$$= \frac{\lim_{x\to 2}(4x+7)}{\lim_{x\to 2}(2x+1)}$$
$$= \frac{\lim_{x\to 2} 4x + \lim_{x\to 2} 7}{\lim_{x\to 2} 2x + \lim_{x\to 2} 1}$$
$$= \frac{4\lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 7}{2\lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 1}$$
$$= \frac{4(2)+7}{2(2)+1} = \frac{8+7}{4+1}$$
$$= \frac{15}{5} = 3$$

1. *Si* $f(x) = c$

$\lim_{x\to a} f(x) = c$ *Límite de una función constante*

2. $\lim_{x\to a} (c\ f(x))$
$= c\lim_{x\to a} f(x)$

Límite de una constante por una función

3. $\lim_{x\to a}\left[f(x) \pm g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = L \pm M$

Límite de la suma de dos funciones

4. $\lim_{x\to a}\left[f(x) \bullet g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) \bullet \lim_{x\to a} g(x) = L \bullet M$

Límite del producto de dos funciones

5. $\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L}{M}$; g (x) $\neq 0$

Límite del cociente de dos funciones

$$\lim_{x\to -3} \sqrt[3]{8x-3}$$
$$= \sqrt[3]{\lim_{x\to -3} (8x-3)}$$
$$= \sqrt[3]{8(-3)-3}$$
$$= \sqrt[3]{-27} = -3$$

6. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$

Límite de la raíz de una función

.

PRACTICA 1

CALCULE EL RESULTADO DE LOS SIGUIENTES LÍMITE:

1. $\lim_{x\to 4} x^2$
2. $\lim_{x\to -3} (3x+2)$
3. $\lim_{x\to 0} (2x-1)$
4. $\lim_{x\to 1} (-x^2+1)$
5. $\lim_{x\to 2} (-x^2+x-2)$
6. $\lim_{x\to 1} (3x^3-2x^2+4)$
7. $\lim_{y\to -1} (y^3-2y^2+3y-4)$
8. $\lim_{x\to 4} \sqrt[3]{x+4}$
9. $\lim_{x\to -4} (x+3)^3$
11. $\lim_{x\to -3} \frac{2}{x+2}$
12. $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}}{x-4}$
13. $\lim_{x\to -1} \frac{x^2+1}{x}$
14. $\lim_{x\to -1} \frac{2x+1}{x^2-3x+4}$
15. $\lim_{x\to 3} \sqrt{x+1}$
16. $\lim_{x\to 3/4} \frac{16x^2+9}{4x+3}$
17. $\lim_{x\to 1/3} \frac{1+9x^2}{1+3x}$
18. $\lim_{x\to 2} \frac{4x^3-2}{2x+1}$
19. $\lim_{x\to 9} 4x+13$

10. $\lim_{x\to 0}(2x-1)^3$

20. $\lim_{x\to 0}\frac{5x^4-6}{x^2+2}$

RESPUESTAS

1) 16; 2) -7; 3) -1; 4) 0; 5) -4; 6) 5; 7) -6; 8) 2; 9) -1; 10) -1; 11) -2; 12) -2; 13) -2: 14) $-\frac{1}{8}$; 15) 2; 16) 3; 17) 1; 18) 6; 19) 49; 20) -3

3. LÍMITES INFINITOS

En esta sección se examinará el comportamiento de las funciones *f*(x) y se aplicarán para obtener gráficas detalladas de funciones como $f(x)=\frac{1}{x}$.

Una buena gráfica es una herramienta valiosa para comunicar el comportamiento de una función.

LÍMITE DE UNA FUNCIÓN $f(x)=\frac{1}{x}$ CUANDO X TIENDE A CERO

Obsérvese que en este caso no se pueden aplicar las proposiciones anteriores, puesto que para x =0 se anula el denominador, es decir la función no está definida.

Vamos a tabular los valores y hagamos el análisis a la izquierda y a la derecha de “0”

Reforzando tus conocimientos

$$y = \frac{1}{x}$$

$$y = \frac{1}{-0.1}$$

= -10

$$y = \frac{1}{-0.01}$$

= -100

$$y = \frac{1}{0.1}$$

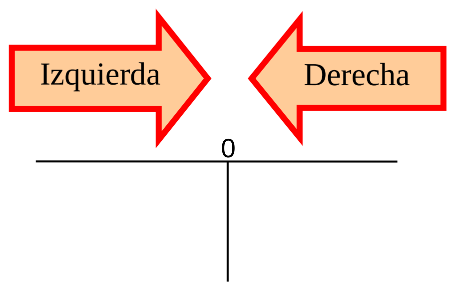
= 10

$$y = \frac{1}{0.01}$$

= 100

x	$y = \frac{1}{x}$
-0.1	-10
-0.01	-100
-0.001	-1,000
-0.0001	-10,000
-0.00001	-100,000
↓	↓
0	$-\infty$

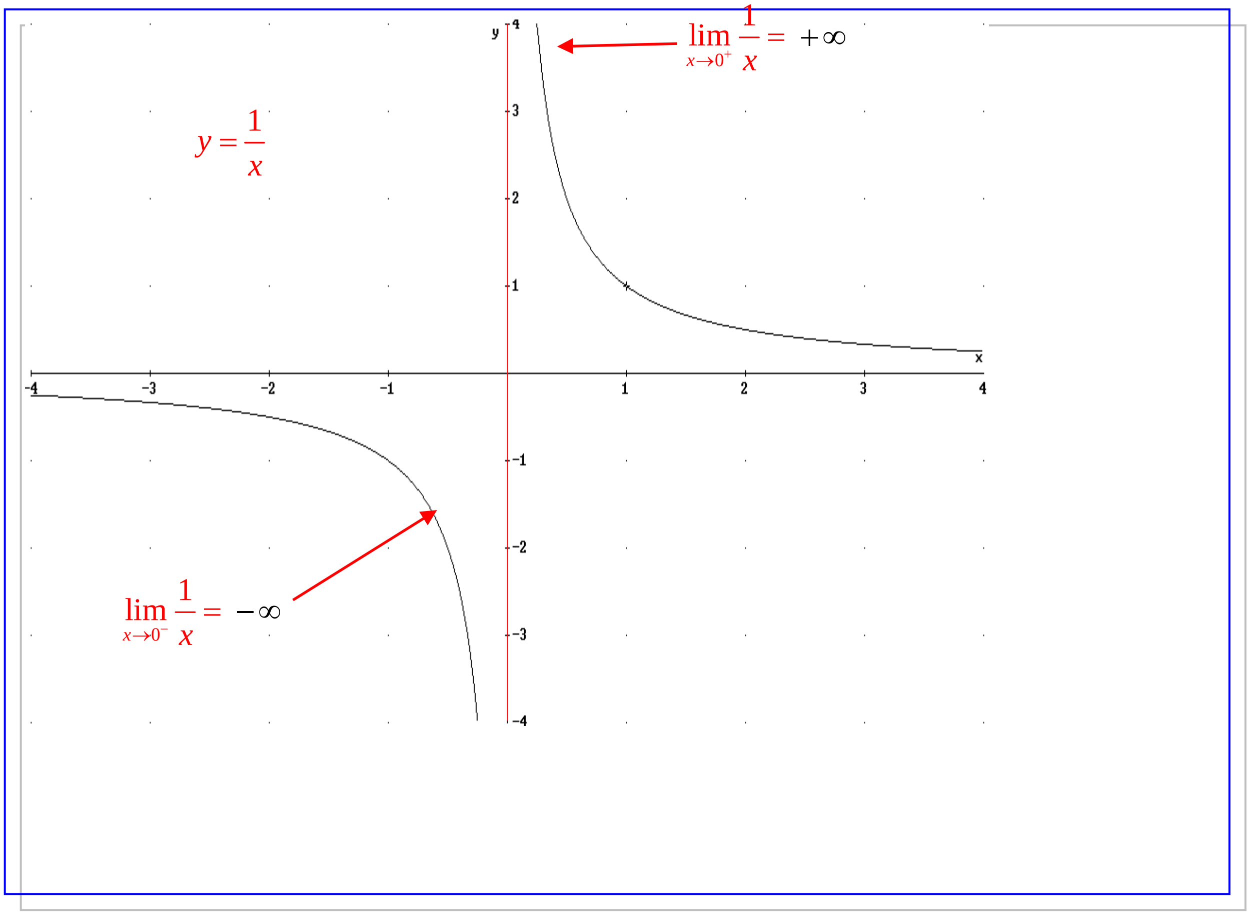
x	$y = \frac{1}{x}$
0.1	10
0.01	100
0.001	1,000
0.0001	10,000
0.00001	100,000
↓	↓
0	$+\infty$



En este caso la función $f(x) = \frac{1}{x}$ no tiende a ningún límite o decimos que se hace infinitamente pequeña, tendiendo a $-\infty$ cuando se aproxima por la izquierda o infinitamente grande, tendiendo a $+\infty$ cuando se aproxima a cero por la derecha es decir: $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ y $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$. Por tanto, los limites laterales no existen ya que el comportamiento no es el mismo por lo que se concluye:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = no\ exixte$$

Obsérvese la gráfica de la función.



ANALICEMOS EL COMPORTAMIENTO DE LA FUNCIÓN $f(x) = \frac{1}{x^2}$ **CUANDO SE APROXIMA AL VALOR CERO.**

POR LA IZQUIERDA

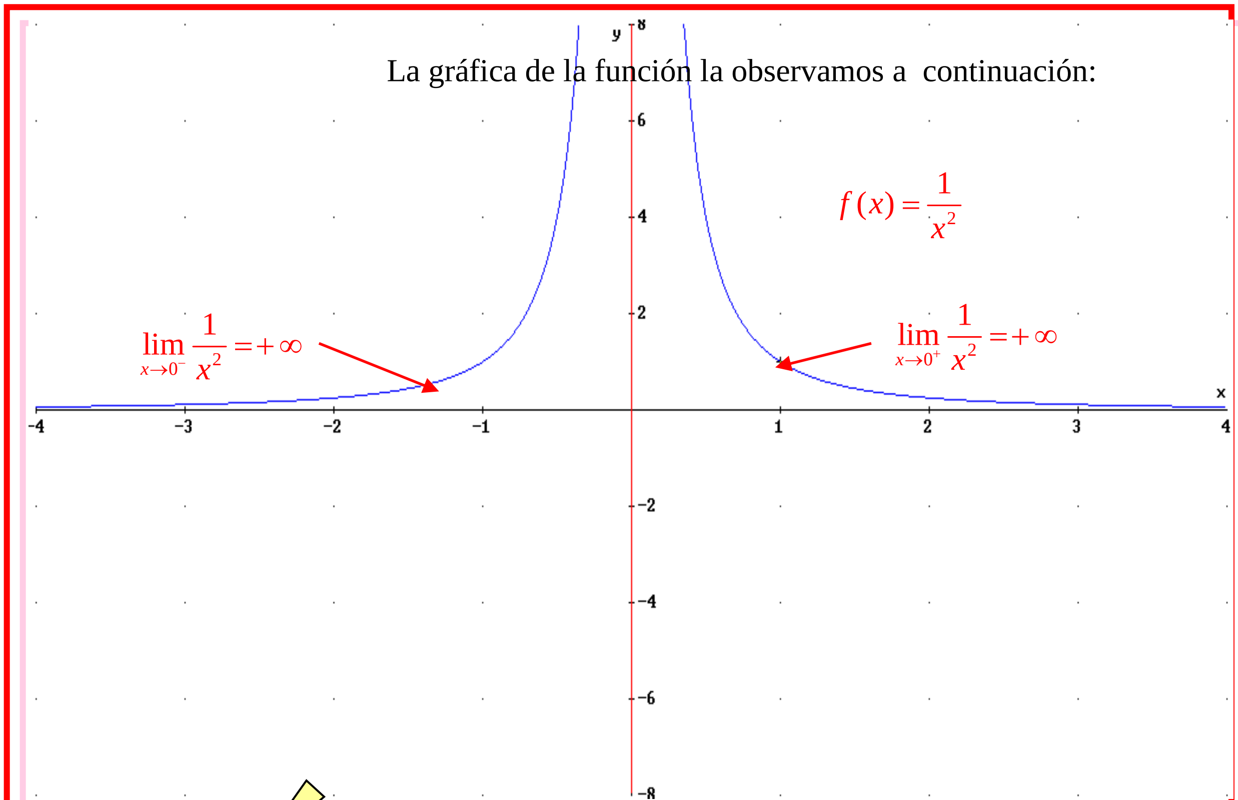
$x \to 0^-$	$f(x) = \frac{1}{x^2}$
-0.5	4
-0.25	16
-0.10	100
-0.05	400
-0.01	10,000
0	$+\infty$

POR LA DERECHA

$x \to 0^+$	$f(x) = \frac{1}{x^2}$
0.5	4
0.25	16
0.10	100
0.05	400
0.01	10,000
0	$+\infty$

Cuanto más cercano se tome el valor de x a cero por la izquierda y por la derecha, la función $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ *se vuelve más grande, es decir tiende a* $+\infty$**,** es decir $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$

La gráfica de la función la observamos a continuación:

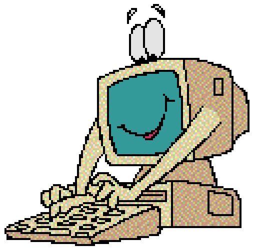


CONCLUSIÓN:

Sea *f* una función definida en ambos lados de a, excepto posiblemente en el propio valor a. Entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ significa que los valores de *f(x)* se pueden hacer arbitrariamente grandes (tan grande como se quiera) tomando x lo suficientemente cercano a “*a*” y $x \neq a$. Sea *f* una función definida en ambos lados de a, excepto posiblemente en el propio valor a. Entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ significa que los valores de *f(x)* se pueden hacer arbitrariamente pequeños, tomando x lo suficientemente cercano a “*a*” y $x \neq a$.

Calculemos los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{3}{x-2}$ b) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{3}{x-2}$



a) El numerador es positivo y cuando x $\to 2^+$ (tiende a 2 por la derecha), (x – 2) $\to 0$ (tiende a cero) por valores positivos luego $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{3}{x-2} = \infty$

b) El numerador es positivo y cuando x $\to 2^-$(tiende a dos por la izquierda), (x – 2) $\to 0$(tiende a cero) por valores negativos luego $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{3}{x-2} = -\infty$

PRACTICA 2

A. ENCUENTRE EL LÍMITE INDICADO:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{x^2}\right)$

2. $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{1}{x^2-1}\right)$

3. $\lim\limits_{x\to 3^-}\left(\dfrac{1}{x-3}\right)$

4. $\lim\limits_{x\to 3^+}\left(\dfrac{1}{x-3}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x^2-2x}\right)$

6. $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{x^2}{x^2-4}\right)$

7. $\lim\limits_{x\to 4^-}\left(\dfrac{4}{x+4}\right)$

8. $\lim\limits_{x\to -5}\left(\dfrac{-1}{(x+5)^2}\right)$

9. $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{4x}{x-1}\right)$

10. $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{x-1}{x^2(x+2)}\right)$

11. $\lim\limits_{x\to 3^+}\left(\dfrac{x^3}{x^2+5x+6}\right)$

12. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2}{(x-2)^2}\right)$

13. $\lim\limits_{x\to 3^-}\left(\dfrac{x+1}{x^2-9}\right)$

14. $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{5x^2}{4-x^2}\right)$

15. $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{x+4}{x^2-1}\right)$

16. $\lim\limits_{x\to 5^+}\left(\dfrac{3-x}{x-5}\right)$

17. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{(x-2)^2}\right)$

18. $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{-3}{(x-4)^2}\right)$

19. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

20. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4x^2-3}{x^2-x}\right)$

B. Calcula el límite

1. $\lim_{x \to 0^-} \left(\frac{\sqrt{x^2+4}}{x} \right)$

2. $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\sqrt{x^2+4}}{x} \right)$

3. $\lim_{x \to 2^+} \left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-2} \right)$

4. $\lim_{x \to 2^-} \left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-2} \right)$

5. $\lim_{x \to 3^-} \left(\frac{1}{\sqrt{3-x}} \right)$

6. $\lim_{x \to 3^+} \left(\frac{1}{\sqrt{x-3}} \right)$

7. $\lim_{x \to 2^+} \left(\frac{-2}{\sqrt[3]{x-2}} \right)$

8. $\lim_{x \to 2^-} \left(\frac{-2}{\sqrt[3]{x-2}} \right)$

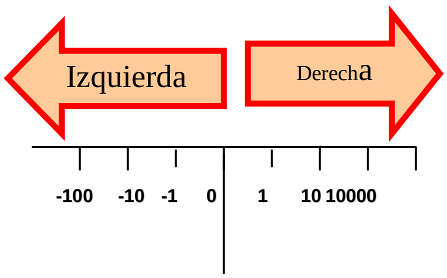
9. $\lim_{x \to -1^+} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x+1}} \right)$

10. $\lim_{x \to -4} \left(\frac{x^2-3x+1}{(x-4)^2} \right)$

11. $\lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2+x-1}{x^3+x^2} \right)$

4. LÍMITES AL INFINITO

LÍMITE DE UNA FUNCIÓN $f(x)=\frac{1}{x}$ **CUANDO X TIENDE A** $\pm\infty$.



Si observamos los resultados tabulados podremos apreciar que cada vez que x adquiere valores muy grandes (a la derecha) y muy pequeños (a la izquierda) los valores de la función se acercan cada vez más a cero.

El límite de la función $f(x)=\frac{1}{x}$ cuando x $\rightarrow \pm\infty$ es cero y se denota:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0 \quad \text{Simbólicamente: } \frac{1}{\infty}=0.$$

Generalizando podemos rescribir: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{c}{x^n}=0$,

donde c es cualquier número real y n es una potencia positiva n > 0.

Por la izquierda

X $\rightarrow -\infty$	$f(x)=\frac{1}{x}$
-1	-1
-10	-0.1
-100	-0.01
-1,000	-0.001
-10,000	-0.0001
$\downarrow$	$\downarrow$
$-\infty$	0

Por la derecha

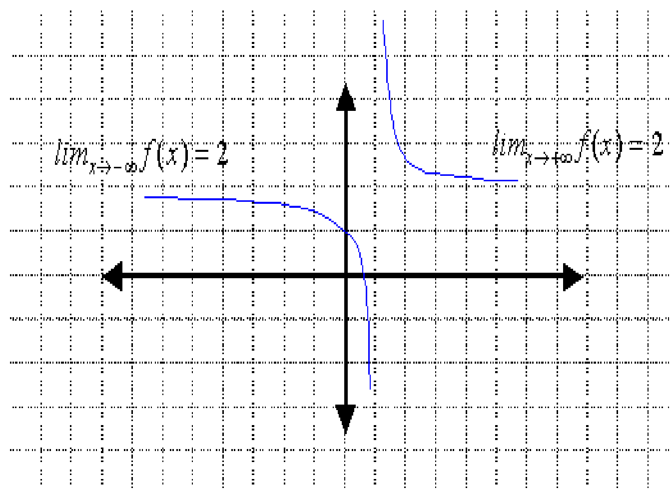
X $\rightarrow \infty$	$f(x)=\frac{1}{x}$
1	1
10	0.1
100	0.01
1,000	0.001
10,000	0.0001
$\downarrow$	$\downarrow$
∞	0

Analicemos el siguiente ejemplo:

Sea la función :

$$f(x)=\frac{2x-1}{x-1}$$

Gráfica de la función :



Su comportamiento nos lleva a la siguiente conclusión: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{x-1} = 2$

Analíticamente, este límite tiene la forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$ la cual puede eliminarse dividiendo el numerador y el denominador por la mayor potencia de x que aparece en la fracción, en este caso *x*:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x}-\frac{1}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}=\frac{2-0}{1-0}=\frac{2}{1}=2$$

El resultado es el que se mostraba gráficamente.

Ejemplo:

Calculemos $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{3x^2+x+1}$

Este límite tiene la forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$ luego la mayor potencia de la fracción es x^2, procedemos a dividir cada término de la fracción por esta:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{3x^2+x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1+0}{3+0+0}=\frac{1}{3}$$

Se tuvo en cuenta que $\frac{1}{x}$ y $\frac{1}{x^2}$ tienden a cero cuando x $\to\infty$.

EJEMPLO:

Aplicación

Supóngase que, para cierta corporación, la utilidad mensual (en miles de dólares) en el tiempo (en meses) se estima por P(t) = $\frac{(2t-4)}{(t+1)}$. Pronostique la utilidad a largo plazo, cuando t $\to \infty$, y trace la gráfica de P(t) para t $\geq$ 0.

Solución:

La utilidad a largo plazo se pronostica por

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{2t-4}{t+1}$$

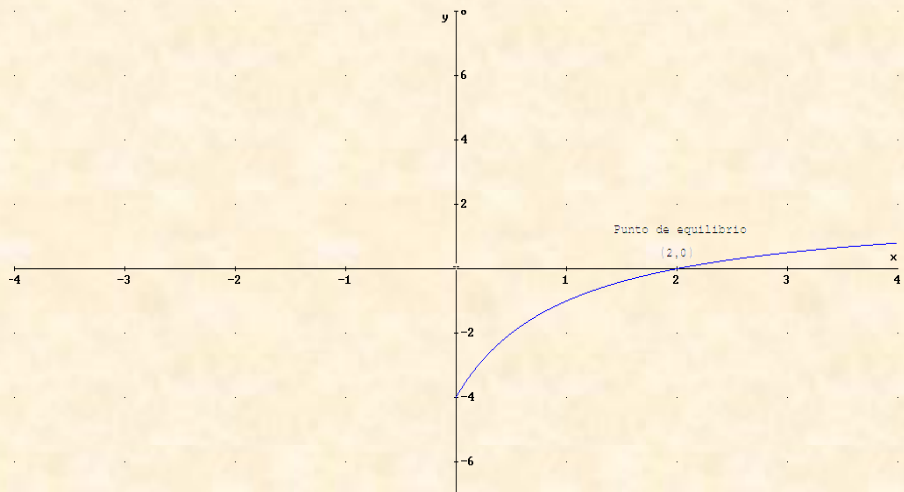
$$= \lim_{t\to\infty} \frac{(2t-4)\left(\frac{1}{t}\right)}{(t+1)\left(\frac{1}{t}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2-\left(\frac{4}{t}\right)}{1+\left(\frac{1}{t}\right)}$$

=2(miles de dolares)

La gráfica de la función de utilidad se muestra a continuación:

P(t) = $\frac{(2t-4)}{(t+1)}$. Para t ≥ 0.



Considérese que (2,0) es el punto de equilibrio de la función de utilidad P(t), de modo que la corporación empieza a tener una utilidad después de transcurridos 2 meses. En la figura de arriba se muestra esta intersección.

PRACTICA 3

A. **ENCUENTRE EL LÍMITE INDICADO:**

1. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-x-2}{5x^2+4x+1}\right)$

2. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3+3x}{4x^3-x^2+1}\right)$

3. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{x+1}\right)$

4 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^4-3x^3+4}{x^5-2x^3-x+1}\right)$

5. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x^2-3x+1}\right)$

6. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2-4x+2}{3x-4}\right)$

7. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^3-2x^2+4x-5}{x^2-3x+1}\right)$

8. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-4x}{3x-2}\right)$

9. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2+2x-1}\right)$

10. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4+3x-x^3}{x^2-2x+1}\right)$

D. DETERMINE EL RESULTADO DE CADA UNO DE LOS SIGUIENTES LÍMITES:

1. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}\right)$

5. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-9}{\sqrt{4x^2+3x+2}}\right)$

2. $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2-2x+3}}{x+3}\right)$

6. $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

3. $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+4}+x\right)$

7. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)$

4. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

8. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+4}}\right)$

5. FORMAS INDETERMINADAS

Hasta el momento hemos visto como calcular el límite de una función:

a) Si el numerador y el denominador tienen límites distintos de cero, el límite del cociente existe y se aplica las proposiciones del límite para el cociente**:**

$$\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{L}{M} \ ; \ g\,(x) \neq 0$$

(pag 14)

b) Si el límite del numerador es cero y el denominador es distinto de cero, el límite de la fracción es cero.

c) Si el límite del numerador e distinto de cero y el denominador es cero, la fracción no tiene límite y se dice que tiende a más o menos infinito, según el caso.

Pero si el límite del numerador y del denominador son ambos iguales a cero se btiene la expresión $\frac{0}{0}$, que es una de las formas llamadas indeterminadas porque cualquier número que se coloque como cociente si se multiplica por el divisor cumple con la condición de que es igual al dividendo.

En algunas ocasiones, esta forma indeterminada se puede eliminar factorizando el numerador y el denominador de la fracción y efectuando su correspondiente simplificación, para luego calcular el límite. (esta parte se estudió en el punto 1, en noción intuitiva de limite)

En los casos donde intervienen raíces en el numerador o el denominador, se puede eliminar la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ efectuando una racionalización del numerador o el denominador según sea el caso.

Evaluemos los siguientes límites si existen

a. $\lim_{x \to 1}\left(\frac{x^2+2x-3}{x-1}\right)$

Aplicando la proposición relativa al límite de un cociente tenemos:

$$\lim_{x \to 1}\left(\frac{x^2+2x-3}{x-1}\right) = \frac{\lim_{x \to 1}\left(x^2+2x-3\right)}{\lim_{x \to 1}\left(x-1\right)}$$

$$= \frac{1+2-3}{1-1} = \frac{0}{0}$$

Ahora bien, factorizando el numerador resulta

$$\lim_{x \to 1}\left(\frac{x^2+2x-3}{x-1}\right) = \lim_{x \to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+3)}{\cancel{x-1}}$$

$$= \lim_{x \to 1}(x+3)$$

$$=1+3$$

$$=4$$

Ejemplo: $\frac{0}{0}$ = 1, 2, 3, 4 ……….

b). Calcular el límite de: $\lim_{x\to a}\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}\right)$

Si evaluamos se obtiene la forma indeterminada $\frac{0}{0}$, para quitar la forma indeterminada multiplicaremos numerador y denominador por el conjugado del numerador y tendremos:

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}\right)=\lim_{x\to a}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}\right)\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\right)$$

$$=\lim_{x\to a}\left(\frac{x-a}{(x-a)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{\lim_{x\to a}\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}\right)$$

$$=\frac{1}{\lim_{x\to a}\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}$$

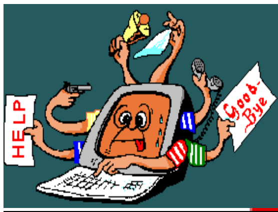
$$=\frac{1}{\left(2\sqrt{a}\right)}=\frac{\sqrt{a}}{2a}$$

c.) calcular el límite de $\lim_{\theta\to 0}\left(\dfrac{sen\theta}{\tan\theta}\right)$

$$\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{sen\theta}{\tan\theta}\right)=\frac{\lim_{\theta\to 0} sen\theta}{\lim_{\theta\to 0}\tan\theta}=\frac{0}{0}$$

Para quitar la forma indeterminada recordemos que la tangente es igual al seno sobre el coseno. Sustituyendo, resulta:

$$\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{sen\theta}{\tan\theta}\right)=\lim_{\theta\to 0}\frac{sen\theta}{\frac{sen\theta}{\cos\theta}}=\lim_{\theta\to 0}\cos\theta=\cos 0=1$$



PRACTICA 4

I. Aplique las proposiciones de límite y determine su valor:

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x-1}$

2. $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{t^3+1}{t^2-1}$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x^2+3x-1}{x} + \dfrac{1}{x} \right)$

4. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2-3x}{4x^2+5}$

5. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(5 - \dfrac{2}{x} \right)$

6. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2-1/x}{x^2+1}$

7. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{8-\sqrt{x}}{1+4\sqrt{x}}$

8. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{3x}{x+2} - \dfrac{x-1}{2x+6} \right)$

9. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{2x^2+5x-3}{6x^2-7x+2}$

10. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x^3-8}$

11. $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{x-16}{\sqrt{x}-4}$

12. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x^2}{x-1} - \dfrac{1}{x-1} \right)$

13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4-\sqrt{16+h}}{h}$

14. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^2-3x-5}{x^3+1}$

15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x^3-2x+x}{3x^2+2x}$

16. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x-1}$

17. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{4x^3-2x^2+1}{3x^3-5}$

18. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$

19. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3} \right)$

20. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

21. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}$

22. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$

23. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt[3]{x^3+1}}$

24. $\lim\limits_{t\to \infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} \right)$

25. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$

26. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

27. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{\sqrt[3]{x-2}}$

28. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$

29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{|x|}$

31. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{|x-2|}$

32. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$

33. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x+x}{3x^2+2x}$

33. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{x-a}$

34. $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$

35. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-2x^2+1}{3x^3-5}$

6. CONTINUIDAD Y DISCONTINUIDAD DE FUNCIONES

En matemáticas y ciencias, utilizamos la palabra continuo para describir un proceso que sigue sin cambios abruptos. De hecho, nuestra experiencia nos lleva a suponer esto como una característica esencial de muchos procesos naturales. Es esta noción, con respecto a funciones, lo que ahora queremos precisar. Veamos el significado gráfico de las siguientes funciones.

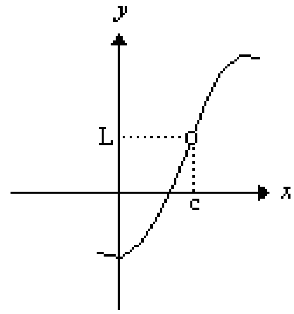


Figura 3.6

En esta gráfica se tiene que:

$$\lim_{x\to c} f(x) \text{ sí existe}$$

f(c) no existe

Figı 9

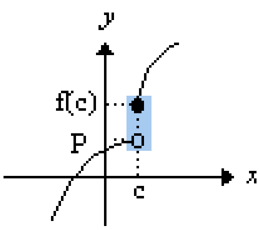


Figura 10

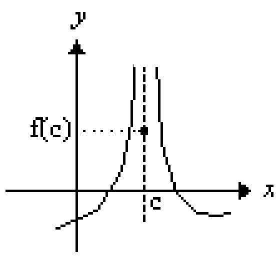


Figura 11

En estas gráficas se tiene que:

$$\lim_{x\to c} f(x) \text{ no existe}$$

f(c) sí existe

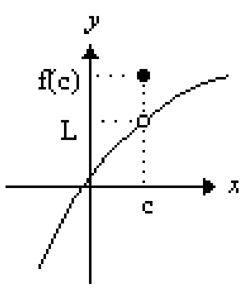


Figura 12

En esta gráfica se tiene que:

$$\lim_{x\to c} f(x) \text{ sí existe}$$

f(c) sí existe, pero

$$\operatorname{Lim}_{x\to c} f(x) \neq f(c)$$

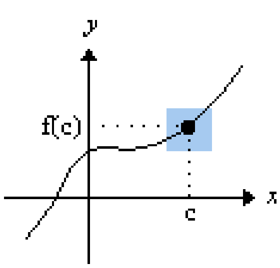


Figura 13

En esta gráfica se tiene que:

$$\lim_{x\to c} f(x) \text{ sí existe}$$

f(c) sí existe y además

$$\operatorname{Lim}_{x\to c} f(x) = f(c)$$

Un vistazo a las figuras anteriores nos permite darnos cuenta que, salvo en la última, en todas las demás la gráfica de la función presenta algún tipo de ruptura de la curva sobre el valor de $x = c$. En otras palabras solamente la gráfica del último caso podría ser dibujada "sin levantar el lápiz del papel". Esta última es la que intuitivamente llamaríamos una **función continua**. Precisamente la definición de continuidad está basada en la situación que se presenta en este último caso.

6.1 CONTINUIDAD EN UN PUNTO

DEFINICIÓN DE CONTINUIDAD

Suponga que *f* es una función que está definida en algún intervalo abierto que contenga a *c*. Decimos que la función *f* es **continua en** *x*=*c* si se tienen las siguientes condiciones:

1. Existe *f(c)*, esto es: *c* está en el dominio de *f*.
2. También existe $\lim\limits_{x \to c} f(x)$.
3. Además $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Si *f* no es continua en *c* se dice que es **discontinua** en *c*.

Ejemplo. Funciones continuas y discontinuas

1. La función $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-9}$ es discontinua en $x = 3$ y en $x = -3$ pues no existen ni f(3) ni f(-3)

Discusión sobre la continuidad de algunas funciones

(en estos casos el denominador se anula). En todos los demás valores en **R** la función es continua.

2. La función $f(x) = \sqrt{x-1}$ es continua para todo valor $x \geq 1$.

- *Nota*: En el punto 2 del ejemplo se tiene que el dominio de la función es el intervalo [1, ∞). En ese caso no tiene sentido hablar de $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ pues la función no está definida para valores menores que 1. Pero en estas circunstancias diremos que *f* es continua en [1,+∞) porque es continua en (1,+∞) y además

$$\operatorname*{Lim}_{x\to 1+} f(x) = f(1)$$

Ejemplo.

1. Si tenemos una función constante *f(x)*=*k*, sabemos que para cualquier *c* se tiene $\operatorname*{Lim}_{x\to c} f(x)$ =*k* y además *f(c)*=*k*. Esto nos dice que es un función continua.
2. La función $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ es
    a. discontinua en 1 porque *f*(1) no existe, pero
    b. continua en todos los demás puntos. Por ejemplo *f*(2)=3 y

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{2^2 - 1}{2 - 1} = \frac{3}{1} = 3$$

3. La función identidad *f(x)=x* también es continua pues *f(c)=c* y $\lim_{x \to c} x = c$.

En realidad, si al calcular un límite cuando *x* tiende a *c* éste se obtiene por simple evaluación (es decir: no es un límite indeterminado), entonces la función es continua en *c*.

6.2 CONTINUIDAD EN UN INTERVALO

En general, decimos que una función es **continua** en **R** si es continua para todo *x* en **R**. También decimos que es continua en un intervalo abierto ***I*** si es continua para toda *x* en ***I***.

Ejemplo de Continuidad de una función racional

Determinar en qué conjunto es continua la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x + 5}{x - 3}$$

Solución: El dominio de esta función es **R**-{3} y la función es continua en todo su dominio.

Ejemplo 8. Continuidad de una función con una raíz en el denominador

Determinar dónde es continua la función

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Solución: Esta es una función continua en todo su dominio, es decir en (-1,1).

Ejemplo de Continuidad de una función definida por partes

Determinar dónde es continua la función

$$h(x) = \begin{cases} 2x+1 \text{ si } x < 0 \\ x^2+1 \text{ si } 0 \le x \le 2 \\ x-3 \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

Solución: Aquí tenemos una función definida por partes. Dentro de cada parte la función es continua, pero podría haber problemas con los límites en los puntos de división 0 y 2.

Tenemos

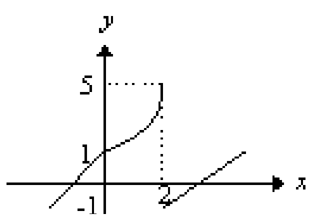


Figura 14

$y = h(x)$

$$\lim_{x\to 0-} h(x) = \lim_{x\to 0-}(2x+1) = 1$$

$$\lim_{x\to 0+} h(x) = \lim_{x\to 0+}(x^2+1) = 1$$

y además

$h(0)=0^2+1=1$,

por lo tanto la función es continua en 0. Por otro lado,

$$\lim_{x\to 2-} h(x) = \lim_{x\to 2-}(x^2+1) = 5$$

$$\lim_{x\to 2+} h(x) = \lim_{x\to 2+}(x-3) = -1$$

Esto dice que $\lim_{x\to 2} h(x)$ no existe y por lo tanto *h* no es continua en 2.

Resumiendo la información decimos que h es continua en **R**-{2}.

6.3 FUNCIONES DISCONTINUAS

Hemos visto anteriormente que las funciones pueden tener discontinuidades en algunos puntos. Básicamente la dicontinuidad en algún punto *x* = *c* se presenta por alguna de las razones siguientes:

A. El límite $\lim_{x \to c} f(x)$ no existe.

B. El límite $\lim_{x \to c} f(x)$ sí existe pero *f(c)* no existe.

C. El límite $\lim_{x \to c} f(x)$ sí existe, *f(c)* también existe, pero $\lim_{x \to c} f(x) \neq f(c)$

D. Ni *f(c)* ni $\lim_{x \to c} f(x)$ existen.

6.3.1 TIPOS DE DISCONTINUIDADES

Sea *f* discontinua en *x*=*c*, decimos que

(a) la discontinuidad es **evitable** si $\lim_{x \to c} f(x)$ existe.

(b) la discontinuidad es **no evitable o esencial** si $\lim_{x \to c} f(x)$ no existe.

En este caso, si $\lim_{x \to c^+} f(x)$ y $\lim_{x \to c-} f(x)$ existen pero son diferentes, se dice que la discontinuidad es de **salto**.

Ejemplo. Calculando discontinuidades evitables y no evitables o esenciales

Determinar cuáles son los puntos de discontinuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1 \text{ si } x < 1 \\ x^2 + 3 \text{ si } 1 < x \leq 3 \\ 4x + 1 \text{ si } 3 < x \end{cases}$$

Indicar cuáles son evitables y cuáles son no evitables.

Solución**:** La función está definida en **R**-{1,3} tiene entonces dos puntos de discontinuidad: en *x*=1 y en

x=3 Tenemos que: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 4$ y $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 4$

por lo tanto $\lim_{x\to 1} f(x) = 4$ y entonces en *x*=1 hay una discontinuidad evitable.

Por otra parte

$$\lim_{x\to 3-} f(x) = 12 \text{ y } \lim_{x\to 3+} f(x) = 13$$

por lo tanto

$$\lim_{x\to 3} f(x) \text{ no existe}$$

por lo que en *x*=3 hay una discontinuidad inevitable y es de salto (porque existen los dos límites laterales).

Ejemplo. Redefiniendo una función

Determine los puntos de discontinuidad de la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

y redefina la función para que sea continua en **R**.

***Solución*:** La función es discontinua en x=1 y además

$$\lim_{x\to 1} = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1} x + 1 = 2$$

La discontinuidad es evitable y si escribimos

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} \text{ si } x \neq 1 \\ 2 \text{ si } x = 1 \end{cases}$$

Obtenemos una función idéntica a la función dada (salvo en x=1) y además continua en x=1.

PRACTICA 5

Determine, si los hay, los números en los que la función es discontinua:

1. $f(t) = t^3 - 4t^2 + 7$

2. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 9x + 18}$

3. $f(x) = \begin{cases} x, \text{si}\, x < 0 \\ x^2, \text{si}\, 0 \le x < 2 \\ x, \text{si}\, x > 2 \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, \text{si}\, x < 1 \\ 1 \;, \text{si}\, x = 1 \\ x + 1, \text{si}\, x > 1 \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} 3x - 1, \text{si}\, x \le 1 \\ 3 - x, \text{si}\, x > 1 \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1}, \text{si}\, x < 1 \\ 1 \;, \text{si}\, x \ge 1 \end{cases}$

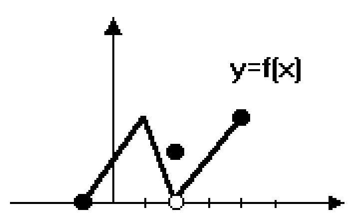
Determine si la función es continua en el intervalo dado:

7. $f(x) = x^2 + 1, a)[-1,4]\, b)[5,\infty)$

8. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}, a)(0,4]\, b)[1,9]$

9. $f(x) = \dfrac{x}{x^3 + 8}$, $a)[-4,3]$ $b)(-\infty,\infty)$

10.



$a)[-1,3]\, b)(2,4]$

Determine los valores de *m* y *n* de modo que la función sea continua:

11. $f(x)=\begin{cases} mx, \ x<4 \\ x^2, \ x\geq 4 \end{cases}$

12. $f(x)=\begin{cases} mx, \quad x<3 \\ n, \quad x=3 \\ -2x+9, \ x>3 \end{cases}$

Analice la continuidad de las siguientes funciones:

13. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x+7} & \text{,si} \quad -10<x<-4 \ ; \ x\neq -7 \\ 3 & \text{,si} \quad x=-7 \end{cases}$

14. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-6}{x^2-2x-8} & \text{,si} \quad -1<x<6 \ ; \ x\neq 4 \\ -2 & \text{,si} \quad x=4 \end{cases}$

15. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3} & \text{,si} \quad 0<x<54 \ ; \ x\neq 3 \\ \dfrac{3}{2} & \text{,si} \quad x=3 \end{cases}$

16. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x^2+x-2} & \text{,si} \quad 0<x<2 \ ; \ x\neq 1 \\ 1 & \text{,si} \quad x=1 \end{cases}$

. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x-6}{x-3} & \text{,si} \ x\neq 3 \\ 5 & \text{,si} \quad x=3 \end{cases}$

66. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x^4-1} & \text{,si} \quad -1<x<2 \ ; \ x\neq 1 \\ x^2+3x-2 & \text{,si} \quad 2\leq x<5 \\ \dfrac{1}{2} & \text{,si} \quad x=1 \end{cases}$

Asíntotas

OBJETIVOS

- Entender el concepto de Asíntota de una función relacionándola con los límites infinitos o/y en el infinito.
- Calcular los límites por la derecha y por la izquierda de una función en un punto, partiendo de su representación gráfica.
- Calcular las ecuaciones de las asíntotas verticales de una función a partir de su representación gráfica.
- Calcular las ecuaciones de las asíntotas verticales de una función a partir del cálculo de límites de su ecuación, saberlas representar gráficamente e interpretar cuál es la posición de la función respecto de la asíntota.
- Calcular las ecuaciones de las asíntotas horizontales de una función a partir de su representación gráfica.
- Calcular los límites cuando x tiende a infinito y a menos infinito de una función, partiendo de su representación gráfica.
- Calcular las ecuación de la asíntota horizontal de una función a partir del cálculo de límites de su ecuación, saberla representar gráficamente e interpretar cuál es la posición de la función respecto de la asíntota.

En el estudio de las funciones hay que buscar las relaciones entre sus expresiones algebraicas y sus representaciones gráficas.

Un problema muy común que hay que resolver en determinadas situaciones es averiguar la gráfica de una función conocida su fórmula algebraica.

Pero por otra parte conviene tener muy claros ciertos conceptos que ayudan, no sólo a realizar dicha representación, sino también a entender o interpretar la gráfica de una función dada.

La noción y el cálculo de límites son fundamentales tanto para el estudio de la continuidad de funciones como para la obtención de sus ramas infinitas (asíntotas), lo cual ayuda sobremanera a la representación de su gráfica.

Una asíntota es una recta que se aproxima infinitamente a una curva a medida que la curva se aleja del origen de coordenadas.

DEFINICIÓN

Si un punto (x,y) se desplaza continuamente por una función $y = f(x)$ de tal forma que, por lo menos, una de sus coordenadas tienda al infinito, mientras que la distancia entre ese punto y una recta determinada tiende a cero, esta recta recibe el nombre de asíntota de la función.

Asíntotas Vertical

La asíntota vertical la obtenemos haciendo el límite de la función cuando la variable tiende a uno de los puntos que quedan fuera del dominio. Este límite lo calculamos acercándonos a este punto lateralmente por la derecha y por la izquierda, ya que es imposible hacerlo sobre el punto en sí, (recordemos que no está definida en ese punto). Si obtenemos el valor del límite α, debemos estudiar el signo que presenta cada límite lateral. Al obtener este valor diremos que existe asíntota vertical en el punto x = a.

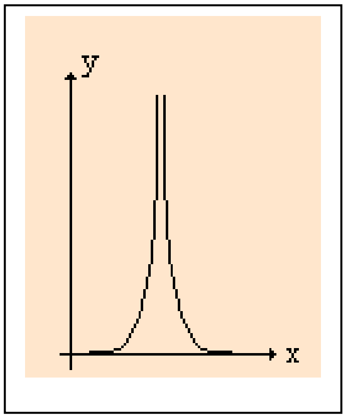
Vamos a hacer algunas consideraciones acerca de las asíntotas verticales:

1. Las funciones polinómicas no tienen asíntotas verticales, ya que su dominio es toda la recta real.
2. Las fracciones algebraicas tienen tantas asíntotas verticales como raíces tenga el denominador. Para aplicar esta regla es propias de funciones que toman el valor infinito para valores finitos de la variable, como por ejemplo la función tg x.

ASÍNTOTA VERTICAL

La recta *x =c* es una **asíntota vertical** de *f(x)* si se cumple al menos una de las siguientes posibilidades:

$$\lim_{x \to c+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to c+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to c-} f(x) = \infty, \quad \lim_{c \to c-} f(x) = -\infty$$



$$f(x)=\frac{3x}{(x-2)^2}$$

Ejemplo

Calcular el siguiente límite.

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x}{(x-2)^2}$$

Solución:

Observe que podemos escribir

$$\frac{3x}{(x-2)^2} = 3x\cdot\frac{1}{(x-2)^2}$$

y tenemos

$$\lim_{x\to 2} 3x = 6, \quad \lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2} = \infty$$

Entonces se tiene que

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x}{(x-2)^2} = \infty$$

x = 2 es una asíntota vertical

Ejemplo . Asíntotas verticales.

Determinar las asíntotas verticales de

$$f(x) = \frac{3x+1}{2x^2+3x-2}$$

Solución: Podemos escribir

$$f(x) = \frac{3x+1}{2x^2+3x-2} = \frac{3x+1}{(2x-1)(x+2)}$$

Vemos que el denominador se hace 0 cuando x=-2 o x=1/2 de manera que hay dos posibles asíntotas verticales: x=-2 y x=1/2.

Calculamos

$$\lim_{x\to 2+} \frac{3x+1}{(2x-1)(x+2)} = \infty$$

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}+} \frac{3x+1}{(2x-1)(x+2)} = \infty$$

y por lo tanto ambas rectas son asíntotas verticales.

Ejemplo. Un cero del denominador que no es asíntota vertical.

Determinar las asíntotas verticales de

$$f(x) = \frac{x^2-9}{x^2-5x+6}$$

Solución: Tenemos

$$f(x) = \frac{x^2-9}{x^2-5x+6} = \frac{x^2-9}{(x-3)(x-2)}$$

Por lo tanto hay dos posibles asíntotas verticales: x =3 y x = 2.

Ahora calculamos

$$\lim_{x\to 2+} \frac{x^2-9}{(x-3)(x-2)} = \infty$$

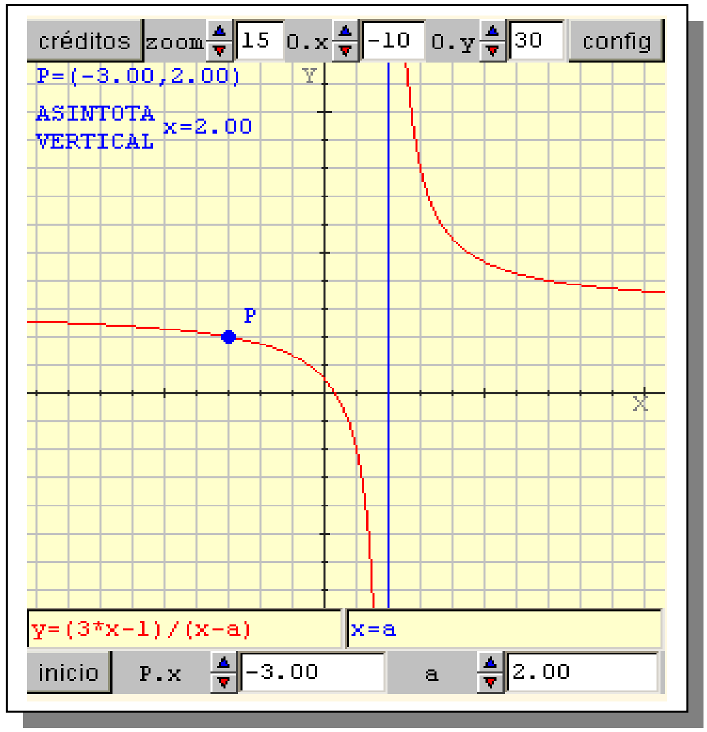
$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{(x-3)(x-2)} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-2)} = \lim_{x\to 3} \frac{x+3}{x-2} = 6$$

Lo anterior dice que la recta x=2 es asíntota vertical, pero x=3 no es asíntota vertical porque el límite considerado no es ni ∞ ni $-\infty$.

EJEMPLO GRÁFICO

¿Cuál es la asíntota vertical de esta función cuando *x*→*2* por la izquierda y por la derecha?

$$a)\ f(x) = \frac{3x-1}{x-2}$$



Con este ejemplo habrás observado que la ***asíntota vertical*** tiene de ecuación *x =2*

Justamente ***el valor de*** *x* ***que hace cero el denominador***.

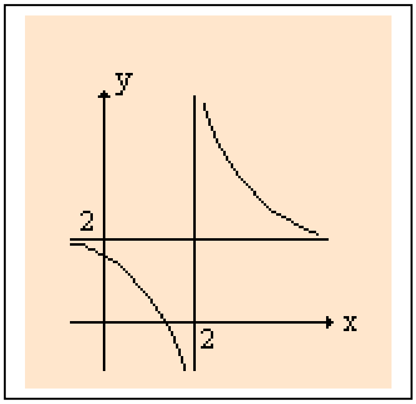
Por tanto para averiguar las asíntotas verticales de una función, basta igualar a cero el denominador. Las soluciones de la ecuación resultante serán asíntotas verticales, si no se anula también el numerador.

Es necesario haber simplificado la fracción de ser posible.

Asíntota Horizontal

La figura representa la gráfica de

$$f(x) = \frac{2x+5}{x-2}$$



$$f(x)= \frac{2x+5}{x-2}$$

Note que en el dibujo, además de la asíntota vertical x = 2, se observa otra recta a la cual la gráfica de la función se "va acercando": ésta es la recta horizontal y = 2. Estas rectas se llaman **asíntotas horizontales de la gráfica** de *f(x)* y están estrechamente relacionadas con los límites al infinito. De hecho, podemos dar la siguiente definición:

DEFINICIÓN ASÍNTOTA HORIZONTAL

Decimos que la recta *y=k* es una asíntota horizontal de la gráfica de *f* si se cumple que

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = k$$

o que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = k$$

Nota:

Ejemplo. Cálculo de asíntotas horizontales.

Determinar las asíntotas horizontales de las siguientes funciones

f(x)=2x^3-4x+1

Solución:

$$\lim_{x \to -\infty} (2x^3 - 4x + 1) = \lim_{x \to -\infty} 2x^3 = -\infty$$

Por otra parte

$$\lim_{x \to \infty} (2x^3 - 4x + 1) = \lim_{x \to \infty} 2x^3 = \infty$$

De modo que *f* no tiene asíntotas horizontales.

Tampoco esta función tiene asíntotas horizontales.

Ejemplo

$$h(x) = \frac{x^3 + 4x + 1}{x^5 - x + 1}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 + 4x + 1}{x^5 - x + 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x^5} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Por lo tanto *h* tiene una asíntota horizontal *y* = 0.

Ejemplo

$$g(x) = \frac{2x^3 - 4x + 1}{x^2 - x + 1}$$

SELECCIÓN ÚNICA

En los ejercicios 1 a 7 escoja la opción que responda o complete correctamente la proposición.

1. El valor de $\lim_{x \to -4^+} \frac{x}{x+4}$ es:

(a) – 4 (b) -1/2 (c) $-\infty$ (d) $+\infty$

2. El valor de $\lim_{x \to 9^-} \frac{x^2 - 81}{x - 9}$ es:

(a) 18 (b) –18 (c) $+\infty$ (d) $-\infty$

3. ¿Cuántas asíntotas verticales tiene la gráfica de

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 - x^2 - 4x + 4}?$$

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

4. ¿Cuál es el valor de

$\lim_{x \to +\infty} x^{-1/3}$?

(a) 1 (b) -1 (c) 0 (d) $+\infty$

5. $\lim_{x \to 3} g(x) = -\infty$ podemos asegurar que

(a) $g(3)$ no existe

(b) x=3 es asíntota vertical de g

(c) y=3 es asíntota vertical de g

(d) $\lim_{x \to -3} g(x) = +\infty$

REFUERZA TUS CONOCIMIENTOS

6. Si $m>n$ entonces una asíntota horizontal de $f(x)=\dfrac{x^n}{x^m}$ es la recta

(a) $y = 0$ (b) $y = m - n$ (c) $y = 1$ (d) No tiene asíntotas horizontales.

7. ¿Cuál es el valor de $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+4x}}{4x+1}$?

(a) 0 (b) – 4 (c) 1/4 (d) -1/4

PREGUNTAS Y PROBLEMAS DE DESARROLLO

En los ejercicios 8 a 19 encuentre el límite pedido.

8. $\lim_{x\to 2}\dfrac{2}{|x-2|}$

9. $\lim_{x\to 2}\dfrac{-3}{x^4}$

10. $\lim_{t\to 8+}\dfrac{t+8}{t-8}$

11. $\lim_{t\to 8-}\dfrac{t+8}{t-8}$

12. $\lim_{h\to 3}\dfrac{2h}{h^2-6h+9}$

13. $\lim_{x\to 5-}\dfrac{x^2}{x^2-25}$

14. $\lim_{t\to 2+}\dfrac{t^2+2t-8}{t^2-4}$

15. $\lim\limits_{x\to -1-} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 2}$

16. $\lim\limits_{x\to -1+} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 2}$

17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 + 5}{6x^4}$

18. $\lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{|x - 1| + 2}{x - 1}$

19. $\lim\limits_{x\to 1-} \dfrac{|x - 1| + 2}{x - 1}$

En los ejercicios 20 a 32 encuentre el límite pedido.

20. $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^2 + 2x - 1)$

21. $\lim\limits_{x\to -\infty} (x^2 + 2x - 1)$

22. $\lim\limits_{x\to +\infty} (-3x^3 + 2x)$

23. $\lim\limits_{x\to -\infty} (-3x^3 + 2x)$

24. $\lim\limits_{t\to -\infty} \dfrac{5t + 8}{2t - 8}$

25. $\lim\limits_{t\to +\infty} \dfrac{56t + 11}{t^2 - 81}$

26. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^4 - 2x}{x^3 - 25}$

27. $\lim_{t \to +\infty} \frac{t^2 + 2t - 8}{t^4 - 4}$

28. $\lim_{x \to -\infty} \frac{-x^3 - 3x}{x^2 - x - 2}$

29. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 6x + 2}{x^3 - x - 2}$

30. $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^3 + 5}{4x^3 - 2}}$

31. $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x + 2}{\sqrt{x^2 - 1}}$

32. $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{4x + 5}}{4x - 2}$

En los ejercicios 33 a 38 determine las asíntotas horizontales y verticales de la función dada.

33. $\frac{3x + 2}{2x - 1}$

34. $\frac{-4}{x^2 - 9}$

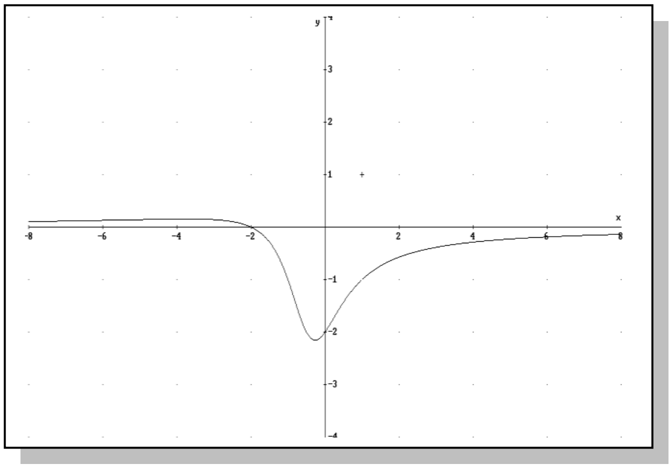
35. $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 2}$

36. $\frac{12}{x^2 + x + 1}$

37. $\frac{2x^3 + 5}{x^3 - x}$

38. $\frac{x^2 - 4}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}$

PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE LÍMITES



1. $$\lim_{x\to 1} \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{1-x} - \frac{3}{(1-x)(x^2+x+1)}$$

$$\lim_{x\to 1} - \frac{x^2+x+1-3}{(1-x)(x^2+x+1)}$$

$$\lim_{x\to 1} - \frac{(x-1)(x+2)}{x-1(x^2+x+1)}$$

$$-\frac{1+2}{1+1+1}$$

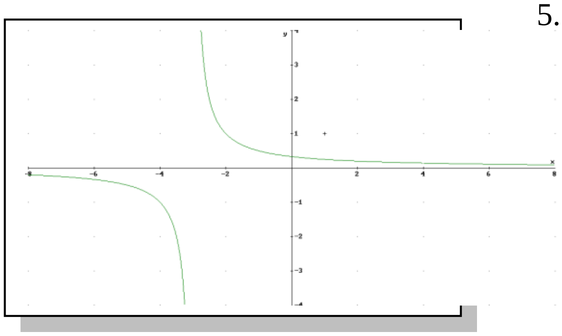
$$-\frac{3}{3}$$

$$=-1$$

2. $$\underset{x\to 3}{Lim} \frac{x-2}{x+2} = \frac{\underset{x\to 3}{Lim}(x-2)}{\underset{x\to 3}{Lim}(X+2)} = 1/5$$

3. $$\underset{x\to 2}{Lim} \frac{x^2-4}{x^2+4} = \frac{4-4}{4+4} = 0$$

4. $$\underset{x\to 4}{Lim} \sqrt{25-x^2} = \sqrt{\underset{x\to 4}{Lim}(25-x^2)} = \sqrt{9}$$



5. $$\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{x^2 - x - 12} = \frac{x-4}{(x-4)(x+3)}$$

$$= \frac{1}{x+3} = \frac{1}{7}$$

6. $$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x^3 + 3x^2 h + 3xh^2 + h^3) - x^3}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{3x^2 h + 3xh^2 + h^3}{h} = \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} = 3x^2$$

. 7. $$\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$$

8. $$\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{(1-x)(1+x+x^2)} \right)$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1+x+x^2-3}{(1-x)(1+x+x^2)}$$

9. $$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{(1-x)(1+x+x^2)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+2)(x-1)}{(1-x)(1+x+x^2)}$$

$$= \frac{-3}{3} = -1$$

10. $$\lim_{x\to 4} \frac{x^4 - 256}{x-4} = \frac{\left(x^2 - 16\right)\left(x^2 + 16\right)}{\left(x-4\right)}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{\left(x-4\right)\left(x+4\right)\left(x^2+16\right)}{x-4}$$

$$= \lim_{x\to 4}\left(x+4\right)\left(x^2+16\right)$$

$$= \left(4+4\right)\left(16+16\right)$$

$$= \left(8\right)\left(32\right) = 256$$

11. $$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{6}{x^2-9}\right)$$

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{x+3-(6)}{(x-3)(x+3)}\right) = \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to 3}\frac{1}{x+3} = \frac{1}{6}$$

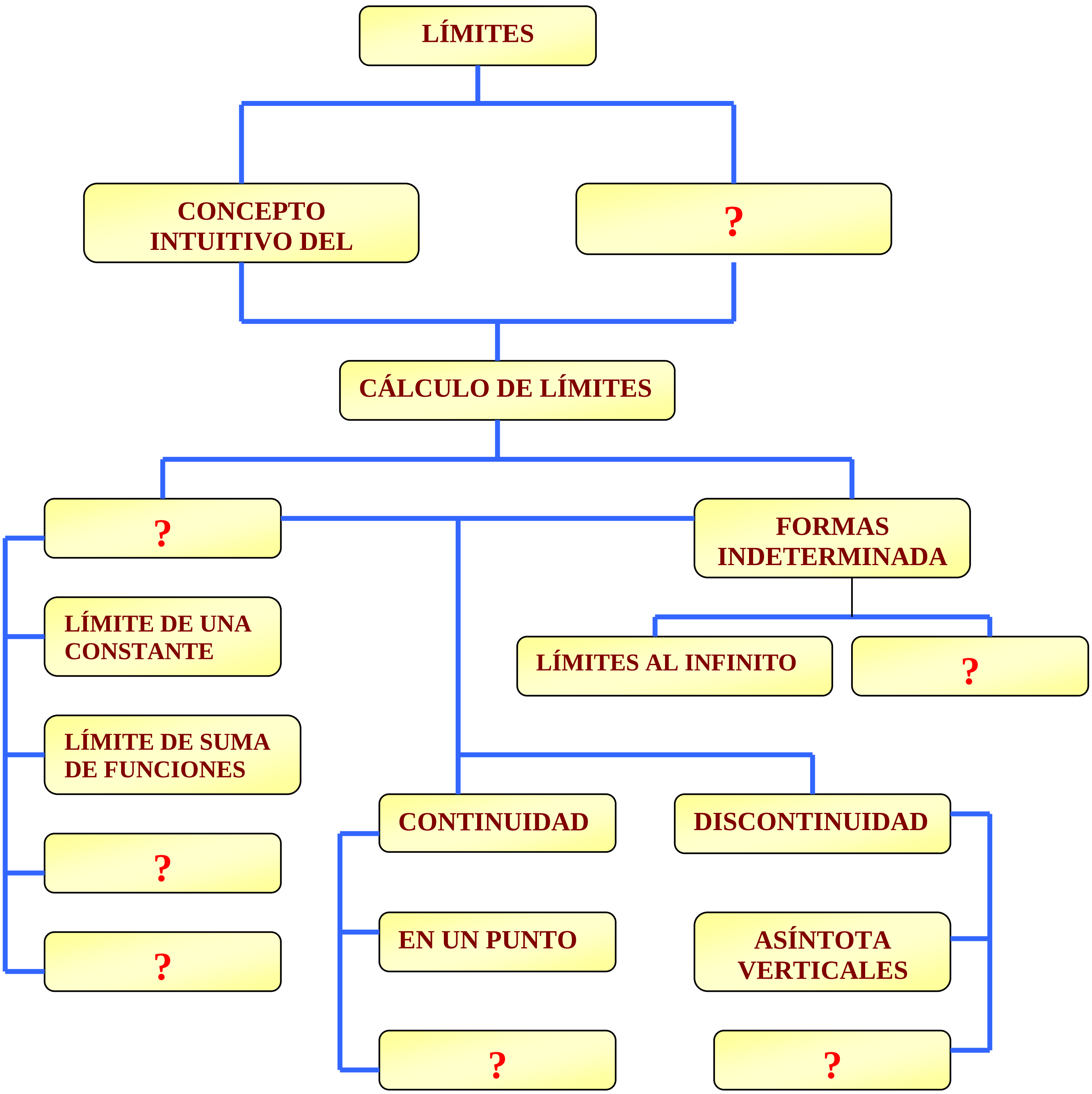
12. $$\lim_{x\to 4} \frac{x^4 - 256}{x^2 - 16}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{\left(x^2-16\right)\left(x^2+16\right)}{\left(x^2-16\right)}$$

$$= x^2 + 16 = 16 + 16 = 32$$

MAPA CONCEPTUAL

Completa el siguiente mapa conceptual



Glosario

Asíntota: recta que se aproxima infinitamente a una curva a medida que la curva se aleja del origen de coordenadas.

Asíntota Vertical : La asíntota vertical es la que se obtiene haciendo el límite de la función cuando la variable tiende a uno de los puntos que quedan fuera del dominio.

Asíntota Horizontal: Decimos que la recta *y=k* es una asíntota horizontal de la gráfica de *f* si se cumple que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \kappa$ o que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \kappa$

Continuidad: Decimos que la función *f* es **continua en** *x*=*c* si se tienen las siguientes condiciones:

1. Existe *f(c)*, esto es: *c* está en el dominio de *f*.
2. También existe $\lim_{x\to c} f(x)$.
3. Además $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Discontinuidad en un punto: La dicontinuidad en algún punto *x* = *c* se presenta por alguna de las razones siguientes:

A. El límite $\lim_{x\to c} f(x)$ no existe.

B. El límite $\lim_{x\to c} f(x)$ sí existe pero *f(c)* no existe.

C. El límite $\lim_{x\to c} f(x)$ sí existe, *f(c)* también existe, pero $\lim_{x\to c} f(x) \neq f(c)$

D. Ni *f(c)* ni $\lim_{x\to c} f(x)$ existen.

Glosario

Discontinuidad evitable : Sea *f* discontinua en *x*=*c*, decimos que la discontinuidad es **evitable** si $\lim_{x \to c} f(x)$ existe.

Discontinuidad no evitable: la discontinuidad es **no evitable o esencial** si $\lim_{x \to c} f(x)$ no existe

Límite: Sea *f* una función definida en cada número de algún intervalo abierto que contiene a "a", excepto posiblemente el número a mismo. El **límite de *f(x)* conforme x se aproxima a "a" es L,** lo que se escribe como: $\lim_{x \to a} f(x) = L$

Si el valor absoluto de la diferencia entre la función y el límite llega a ser tan pequeño, como se quiera para todo valor de <u>x</u> suficientemente próximo al valor de <u>a</u>.

BIBLIOGRAFÍA

1. Libro de texto

1.1 Titulo: Fundamentos de Cálculo Diferencial

Autor: Irma de Robles – Panamá Solís

2. Libro de consulta en orden de preferencias

2.1 Título: El Cálculo con Geometría Analítica

Autor: Louis Leithold

Casa Editora: Harla – VI Edición

2.2 Título: Cálculo Diferencial e Integral

Autor: Frank Ayres Jr.

Casa Editora: McGraw Hill

2.3 Título: El Cálculo con Geometría Analítica

Autor: Earl W. Swokowski

Casa Editora: Grupo Editorial Iberoamérica.